球面のホモトピー群の合成構造について

西村 治

1 概要

本稿の目的は、球面のホモトピー群の合成

$$\circ : \pi_{n+k}(S^n) \times \pi_{n+k+l}(S^{n+k}) \to \pi_{n+k+l}(S^n), \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$$

を自由部分および 2 成分について $k+l \leq 12$ の範囲で計算することである。ただし、生成元の上でのみ計算を行い、右分配則の補正項に関しては論じない。

2 序

n を自然数、k, l を負でない整数とする。球面のホモトピー群 $\pi_{n+k}(S^n)$ は $(n+k)$ 次元球面 $S^{n+k} = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+k+1}) \in \mathbb{R}^{n+k+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+k+1}^2 = 1\}$ から n 次元球面 $S^n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$ への基点を保つ連続写像全体からなる集合を、ホモトピーという同値関係によって割った商集合として定義されるものであり、自然な群構造をもつ。$\pi_{n+k}(S^n)$ は様々な位相空間のホモトピー型の研究のための基礎データと言うべきものであり、したがって、その構造（群構造、合成構造、戸田括弧積の構造など）の決定はホモトピー論における中心的な研究課題の一つであると言える。

$k \leq 19$ のときの球面のホモトピー群 $\pi_{n+k}(S^n)$ の群構造は Toda[T] により決定された。($k = 18$ の場合の一部未決定だった部分については [Od1] により決定された。) 現在では $k \leq 32$ の場合について $\pi_{n+k}(S^n)$ の群構造が決定されている。(特に 2 成分については、$k = 20$ は [MT]、$k = 21, 22$ は [M]、$k = 23, 24$ は [MMO]、$25 \leq k \leq 30$ は [Od2]、$k = 31$ は [Od2] および [IMM]、$k = 32$ は [Od2] および [MM] による。)

また、$\pi_{n+k}(S^n)$ の群構造の計算の過程で、合成

$$\circ : \pi_{n+k}(S^n) \times \pi_{n+k+l}(S^{n+k}) \to \pi_{n+k+l}(S^n), \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$$

についても多くの計算がなされている。しかし、筆者の知る限りでは合成を系統的に計算した結果の資料（すなわち、合成に関する「乗積表」）は存在していないようである。

そこで、本稿では（以下で説明する g^n_{n+k} および π^n_{n+k} について）合成

$$\circ : g^n_{n+k} \times g^{n+k}_{n+k+l} \to \pi^n_{n+k+l}, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$$

を、$k + l \leq 12$ の場合について（一部の未決定な場合を除き）計算した表を作成した。

ここで、$\pi_{n+k}(S^n)$ の部分群 π^n_{n+k} は Toda[T] において導入されたものであり、$\pi_{n+k}(S^n)$ の自由部分と 2 成分の直和であって、懸垂準同型 E がそれらの群たちの間で閉じるように自由部分の分解を選んだものである。(第 5 節、第 7 節とその表 1、および第 8 節を参照。) また、Toda[T] において与えられた π^n_{n+k} の生成元の集合を g^n_{n+k} とおいた。

ただし、表をなるべく簡潔にするために、自明な場合や、懸垂準同型や合成の結合律を用いて有限回の手続きで他のものから求められるものについては記述を省略した。具体的には、戸田の生成元の集合 g^n_{n+k} の分割

$$g^n_{n+k} = d^n_{n+k} \cup b^n_{n+k} \cup s^n_{n+k} \cup o^n_{n+k}$$

を本稿において新たに導入し（第 7 節の表 1、および、第 9 節の命題を参照)、上に述べた合成の計算が

$$k+l \leq 12,\ 3 \leq n \leq \max\{k, l-k\}+2$$
$$(\alpha,\beta) \in \left(s^n_{n+k} \times (d^{n+k}_{n+k+l} \cup o^{n+k}_{n+k+l})\right) \bigcup \left(o^n_{n+k} \times g^{n+k}_{n+k+l}\right)$$

の場合の $\alpha \circ \beta$ の計算に帰着できることを示す（第 10 節)。これにより考えるべき場合を大幅に少なくすることができる。なお、その目的のためには懸垂準同型

$$E\colon \pi^n_{n+k} \to \pi^{n+1}_{n+k+1}$$

が計算可能であることを確認しておく必要がある（第 9 節)。

この $\alpha \circ \beta$ の計算結果を第 10 節の表 2 に示し（ただし、$\alpha \circ \beta \in g^n_{n+k+l}$ となっている場合はもちろん自明であるので省略した)、第 11 節に証明を与えた。

本稿の構成は以下の通りである。第 3 節および第 4 節では本稿で用いるホモトピー論の基本的事項について述べた。第 3 節では基点付き位相空間のホモトピー群に関して、第 4 節では球面のホモトピー群 $\pi_{n+k}(S^n)$ に関してそれぞれ基本的事項を述べたが、より詳しい説明はホモトピー論の教科書、例えば西田 [N] を参照されたい。第 5 節では $\pi_{n+k}(S^n)$ の部分群 π^n_{n+k} の定義と、それらが作る完全系列（$EH\Delta$-系列）について、Toda[T] から引用して説明した。上で述べたように本稿ではこの π^n_{n+k} について合成の計算を行う。また、$EH\Delta$-系列は π^n_{n+k} の群構造の決定のための主道具となるものであり、この系列中の準同型 H および Δ は合成の計算を行う際にも有用である。準同型 H および Δ の定義、性質を説明するためには相当の準備が必要となるため、本稿では略することとした。Toda[T] を参照されたい。第 6 節では戸田括弧積 $\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m$ の定義について Toda[T] から引用して説明した。群 π^n_{n+k} の生成元の多くは $\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m$ を用いて構成することができる。第 7 節では $k \leq 11$ の場合について戸田の生成元の集合 g^n_{n+k} の分割を導入し、表 1 において示した。また、π^n_{n+k} の群構造も Toda[T] から引用して記した。さらに、生成元の定義と性質についてもいくつか述べた。第 8 節では π^n_{n+12} の群構造を Toda[T] から引用して記した。第 9 節では懸垂準同型の計算を記し、さらに第 7 節で導入した戸田の生成元の集合 g^n_{n+k} の分割の性質について述べた。第 10 節では本稿で考えている合成の計算が上に述べたように一部の場合に帰着できることを示し、表 2 において計算結果を示した。第 11 節では表 2 の計算結果の証明を行った。第 12 節では今後の課題について述べた。

本稿において、自然数 m に対し $\mathbb{Z}_m\{\alpha\}$ は元 α を生成元とする位数 m の巡回群、$\mathbb{Z}\{\alpha\}$ は元 α を生成元とする無限位数の巡回群を表すこととする。

多数の貴重なコメントをくださった査読者に感謝を申し上げる。

3 基点付き位相空間のホモトピー群に関する基本的事項

この節では基点付き位相空間のホモトピー群に関する基本的事項を述べる。詳しくはホモトピー論の教科書、例えば西田 [N] を参照されたい。

位相空間 X および Y に対し、X と Y が同相であることを $X \cong Y$ で表すことにする。位相空間 X と X のある区別された点 $x_0 \in X$ の対 (X, x_0) を基点付き位相空間という。

(X, x_0) および (Y, y_0) を基点付き位相空間とする。X と Y の直和 $X \coprod Y$ において $x_0 \in X$ と $y_0 \in Y$ を同一視した空間を $X \vee Y$ で表す。$X \times Y$ の部分空間 $(X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ を考えると $X \vee Y \cong (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y)$ であるので、以後同一視して $X \vee Y = (X \times \{y_0\}) \cup (\{x_0\} \times Y) \subset X \times Y$ と考えることにする。また、$(x_0, y_0) \in X \vee Y$ を $X \vee Y$ の基点と考える。基点付き位相空間 $(X \vee Y, (x_0, y_0))$ を (X, x_0) と (Y, y_0) のウェッジ和という。さらに、$X \times Y$ の $X \vee Y$ による商空間 $(X \times Y)/(X \vee Y)$ を $X \wedge Y$ で表し、商写像 $X \times Y \to X \wedge Y$ による $(x, y) \in X \times Y$ の像を $x \wedge y \in X \wedge Y$ で表す。また、$x_0 \wedge y_0 \in X \wedge Y$ を $X \wedge Y$ の基点と考える。基点付き位相空間 $(X \wedge Y, x_0 \wedge y_0)$ を (X, x_0) と (Y, y_0) のスマッシュ積という。

特に $X \wedge S^n$ を $E^n X$ で表し、X の n 重懸垂という。ここで n は負でない整数であり、n 次元球面 S^n の基点として $(1,0,\cdots,0) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ をとっている。

再び (X,x_0) および (Y,y_0) を基点付き位相空間とする。X から Y への連続写像で x_0 を y_0 にうつすもの全体からなる集合を $\mathrm{Map}_*(X,Y)$ で表す。X からそれ自身への恒等写像を $id_X\colon X \to X$ とすると、もちろん $id_X \in \mathrm{Map}_*(X,X)$ である。$I=[0,1]$ を単位区間とする。$f,g \in \mathrm{Map}_*(X,Y)$ に対し $X \times I$ から Y への連続写像 F で、任意の $x \in X, t \in I$ に対して $F(x,0)=f(x),\ F(x,1)=g(x),\ F(x_0,t)=y_0$ をみたすものが存在するとき、$f \sim g$ と表し f は g にホモトープであるという。また、F を f と g をつなぐホモトピーという。ホモトープという関係 $\sim$ が同値関係であることは容易に確かめられる。$\mathrm{Map}_*(X,Y)$ の同値関係 $\sim$ による商集合 $\mathrm{Map}_*(X,Y)/\sim$ を $[X,Y]_*$ で表し、(X,x_0) から (Y,y_0) へのホモトピー集合という。また、$f \in \mathrm{Map}_*(X,Y)$ が属する同値類を $[f] \in [X,Y]_*$ で表し、f のホモトピー類という。

$(X,x_0),\ (Y,y_0),\ (Z,z_0),\ (W,w_0)$ を基点付き位相空間とし、$f \in \mathrm{Map}_*(X,Y),\ g \in \mathrm{Map}_*(Z,W)$ とするとき、$f \vee g \in \mathrm{Map}_*(X \vee Z, Y \vee W)$ および $f \wedge g \in \mathrm{Map}_*(X \wedge Z, Y \wedge W)$ が自然に定義できる。特に $f \wedge id_{S^n} \in \mathrm{Map}_*(X \wedge S^n, Y \wedge S^n) = \mathrm{Map}_*(E^n X, E^n Y)$ を $E^n f$ で表し、f の n 重懸垂という。$f \sim f' \in \mathrm{Map}_*(X,Y)$ のとき $E^n f \sim E^n f' \in \mathrm{Map}_*(E^n X, E^n Y)$ であることが容易にわかるので、$[f] \in [X,Y]_*$ に対し $E^n[f]=[E^n f] \in [E^n X, E^n Y]_*$ とすることにより、写像 $E^n\colon [X,Y]_* \to [E^n X, E^n Y]_*$ が定義できる。$E^n[f]$ を $[f]$ の n 重懸垂という。

また、$(X,x_0),\ (Y,y_0),\ (Z,z_0)$ を基点付き位相空間とし、$a \in \mathrm{Map}_*(Y,Z),\ b \in \mathrm{Map}_*(X,Y)$ とするとき、合成 $a \circ b \in \mathrm{Map}_*(X,Z)$ を定義できる。さらに $\alpha=[a] \in [Y,Z]_*,\ \beta=[b] \in [X,Y]_*$ とするとき、ホモトピー類についても合成 $\alpha \circ \beta = [a \circ b] \in [X,Z]_*$ を定義できることがわかる。合成 $\circ$ について結合律が成り立つ。すなわち、(W,w_0) も基点付き位相空間とし、$c \in \mathrm{Map}_*(W,X),\ \gamma=[c] \in [W,X]_*$ とするとき、$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c) \in \mathrm{Map}_*(W,Z)$ および $(\alpha\circ\beta)\circ\gamma = \alpha\circ(\beta\circ\gamma) \in [W,Z]_*$ が成り立つ。したがって $a\circ b\circ c$ および $\alpha\circ\beta\circ\gamma$ のように括弧を省略して表しても問題ない。また、$E^n(a\circ b) = E^n a \circ E^n b \in \mathrm{Map}_*(E^n X, E^n Z)$, $E^n(\alpha \circ \beta) = E^n\alpha \circ E^n\beta \in [E^n X, E^n Z]_*$ が成り立つ。

ここで $[X,Y]_*$ において X が n 次元球面 S^n の場合を考え、$[S^n,Y]_* = \pi_n(Y)$ と表す。S^0 は基点ともう 1 点の 2 点からなる集合であるので、$\pi_0(Y)$ は Y の弧状連結成分の集合と同一視できる。$n \geq 1$ のとき $\pi_n(Y)$ における演算 $+$ を以下のように定義する。まず S^n は $S^{n-1} \wedge S^1$ と同相であることに注意する。実際 $n=1$ のときは明らかであり、$n \geq 2$ のときは自然な同相の列 $S^{n-1} \wedge S^1 \cong (I^{n-1}/\partial I^{n-1}) \wedge (I/\partial I) \cong I^n/\partial I^n \cong S^n$ によりわかる。ここで ∂I^n は I^n の境界である。また、自然な同相の列 $S^{n-1} \wedge (S^1 \vee S^1) \cong (S^{n-1} \wedge S^1) \vee (S^{n-1} \wedge S^1) \cong S^n \vee S^n$ があることも容易にわかる。そこで $c_1 \in \mathrm{Map}_*(S^1, S^1 \vee S^1)$ を

$$c_1(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t) = \begin{cases} ((\cos 4\pi t, \sin 4\pi t), (1,0)), & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \\ ((1,0), (\cos 4\pi t, \sin 4\pi t)), & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

によって定義し、さらに $c_n \in \mathrm{Map}_*(S^n, S^n \vee S^n)$ を合成

$$c_n\colon S^n \cong S^{n-1} \wedge S^1 \xrightarrow{id_{S^{n-1}} \wedge c_1} S^{n-1} \wedge (S^1 \vee S^1) \cong (S^{n-1} \wedge S^1) \vee (S^{n-1} \wedge S^1) \cong S^n \vee S^n$$

によって定義する。そして $f,g \in \mathrm{Map}_*(S^n,Y)$ に対し、$f+g \in \mathrm{Map}_*(S^n,Y)$ を合成

$$f+g\colon S^n \xrightarrow{c_n} S^n \vee S^n \xrightarrow{f \vee g} Y \vee Y \xrightarrow{\nabla} Y$$

によって定義する。ここで $\nabla \in \mathrm{Map}_*(Y \vee Y, Y)$ は $\nabla(y,y_0) = \nabla(y_0,y) = y \in Y$ によって定義される写像である。$f \sim f' \in \mathrm{Map}_*(S^n,Y)$ かつ $g \sim g' \in \mathrm{Map}_*(S^n,Y)$ のとき $(f+g) \sim (f'+g') \in \mathrm{Map}_*(S^n,Y)$ であることが容易にわかるので、$\pi_n(Y) = [S^n,Y]_*$ の演算 $+$ を $[f],[g] \in \pi_n(Y)$ に対し $[f]+[g] = [f+g] \in \pi_n(Y)$ とおくことにより定義できる。

$n \geq 1$ のとき $\pi_n(Y)$ は上に述べた演算 $+$ によって群になることが確かめられる。さらに $n \geq 2$ のとき、演算 $+$ は可換な演算となり $\pi_n(Y)$ はアーベル群になることもわかる。$n \geq 1$ のとき $\pi_n(Y)$ を基点付き位相空間 (Y, y_0) の n 次元ホモトピー群という。

また、m を負でない整数とすると、$S^{n-1} \wedge S^1 \cong S^n$ を示すときと同様の議論により $E^m S^n = S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$ であることがわかり、この同相によって自然に誘導される $[S^{n+m}, Y]_*$ から $[E^m S^n, Y]_*$ への全単射により $[E^m S^n, Y]_*$ を (Y, y_0) の $(n+m)$ 次元ホモトピー群 $\pi_{n+m}(Y) = [S^{n+m}, Y]_*$ と同一視できる。そこで写像

$$E^m \colon \pi_n(Y) = [S^n, Y]_* \to [E^m S^n, E^m Y]_* = \pi_{n+m}(E^m Y)$$

を考えると、これは群の準同型になることがわかる。この $E^m \colon \pi_n(Y) \to \pi_{n+m}(E^m Y)$ を $\pi_n(Y)$ の m 重懸垂準同型という。

4 球面のホモトピー群に関する基本的事項

この節では球面のホモトピー群に関する基本的事項を述べる。詳しくはホモトピー論の教科書、例えば西田 [N] を参照されたい。

$n,\ i$ を自然数として n 次元球面 S^n とその基点 $(1, 0, \cdots, 0) \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ に対して i 次元ホモトピー群 $\pi_i(S^n)$ を考える。このときの m 重懸垂準同型 E^m は

$$E^m \colon \pi_i(S^n) \to \pi_{i+m}(E^m S^n)$$

となるが、$E^m S^n = S^n \wedge S^m \cong S^{n+m}$ によって自然に誘導される $\pi_{i+m}(E^m S^n)$ から $\pi_{i+m}(S^{n+m})$ への群の同型によってこれらを同一視すると、m 重懸垂準同型 E^m は

$$E^m \colon \pi_i(S^n) \to \pi_{i+m}(S^{n+m})$$

となる。

さて、まず

$$\pi_i(S^n) = 0, \quad (i < n)$$

であることが知られている。次に、恒等写像 $id_{S^n} \in \mathrm{Map}_*(S^n, S^n)$ のホモトピー類を $\iota_n = [id_{S^n}] \in \pi_n(S^n)$ で表すと $\iota_n = E^{n-1}\iota_1$ であって

$$\pi_n(S^n) = \mathbb{Z}\{\iota_n\}, \qquad (n \geq 1)$$

であることが知られている。さらに、

$$\pi_i(S^1) = 0, \qquad (i > 1)$$

であることも知られている。特に S^1 のホモトピー群は完全に知られている。

また、Serre[S] により以下のことが知られている。

- $\pi_i(S^n)$ は n が奇数で $i > n$ のとき有限アーベル群である。
- $\pi_i(S^n)$ は n が偶数で $i > n$ かつ $i \neq 2n-1$ のとき有限アーベル群である。
- $\pi_i(S^n)$ は n が偶数で $i = 2n-1$ のとき $\mathbb{Z} \oplus A$（A は有限アーベル群）に同型である。

球面のホモトピー群 $\pi_{n+k}(S^n)$ に対して k の値を stem という。(k が負の整数のときは上で述べたように $\pi_{n+k}(S^n) = 0$ である。したがって、k としては負でない整数を考えれば十分である。) 以下のことが知られている。

- （Freudenthal の懸垂定理）$E\colon \pi_{n+k}(S^n) \to \pi_{n+k+1}(S^{n+1})$ は $k+1<n$ のとき同型であり、$n=k+1$ のとき全射である。

証明は [N] を参照されたい。したがって、（群の同型を $=$ で表すことにして）群の同型

$$\pi_{2k+2}(S^{k+2}) = \pi_{2k+3}(S^{k+3}) = \pi_{2k+4}(S^{k+4}) = \cdots$$

が成り立つ。この群を球面の k-stem の安定ホモトピー群という。

さらに、n を自然数、$k,\ l$ を負でない整数として、球面のホモトピー群の合成

$$\circ : \pi_{n+k}(S^n) \times \pi_{n+k+l}(S^{n+k}) \to \pi_{n+k+l}(S^n), \qquad (\alpha,\beta) \mapsto \alpha\circ\beta$$

を考えることができる。群構造と合成構造の関係として、一般に

$$\alpha\circ(\beta+\beta') = \alpha\circ\beta + \alpha\circ\beta', \qquad \alpha\in\pi_{n+k}(S^n),\ \beta,\beta'\in\pi_{n+k+l}(S^{n+k})$$

および

$$(\alpha+\alpha')\circ E\beta = \alpha\circ E\beta + \alpha'\circ E\beta, \qquad \alpha,\alpha'\in\pi_{n+k}(S^n),\ \beta,\in\pi_{n+k+l-1}(S^{n+k-1})$$

が成り立つことがわかる。しかし、一般に

$$(\alpha+\alpha')\circ \beta = \alpha\circ \beta + \alpha'\circ \beta, \qquad \alpha,\alpha'\in\pi_{n+k}(S^n),\ \beta,\in\pi_{n+k+l}(S^{n+k})$$

が成り立つとは限らないので注意が必要である。

5　群 π^n_{n+k} および $EH\Delta$ 系列について

n を 2 以上の整数とし、i を自然数とする。$\pi_i(S^n)$ の 2-成分を $\pi_i(S^n;2)$ で表す。Toda[T] の第 IV 章にしたがい、$\pi_i(S^n)$ の部分群 π^n_i を以下のように定義する。

$$\pi^n_i = \begin{cases} \pi_n(S^n), & (i=n) \\ E^{-1}(\pi_{2n}(S^{n+1};2)), & (i=2n-1) \\ \pi_i(S^n;2), & (i\neq n, 2n-1) \end{cases}$$

ここで、$E^{-1}(\pi_{2n}(S^{n+1};2))$ は $E\colon \pi_{2n-1}(S^n)\to\pi_{2n}(S^{n+1})$ による $\pi_{2n}(S^{n+1};2)$ の逆像である。懸垂準同型 E は $E\colon \pi^n_i \to \pi^{n+1}_{i+1}$ に制限され、したがって m 重懸垂準同型 E^m は $E^m\colon \pi^n_i\to\pi^{n+m}_{i+m}$ に制限される。

π^n_i は $\pi_i(S^n;2)$ を全て含む。そして、$i<n$ のとき $\pi^n_i=0$、$\pi^n_n=\pi_n(S^n)=\mathbb{Z}\{\iota_n\}$ であり、かつ次のことが成り立つ。

- π^n_i は n が奇数で $i>n$ のとき有限アーベル 2-群である。
- π^n_i は n が偶数で $i>n$ かつ $i\neq 2n-1$ のとき有限アーベル 2-群である。
- π^n_i は n が偶数で $i=2n-1$ のとき $\mathbb{Z}\oplus A$（A は有限アーベル 2-群）に同型である。

また、群の同型

$$\pi^{k+2}_{2k+2} = \pi^{k+3}_{2k+3} = \pi^{k+4}_{2k+4} = \cdots$$

が成り立つ。さらに、準同型 $H\colon \pi^{n+1}_{i+1}\to\pi^{2n+1}_{i+1}$ および準同型 $\Delta\colon \pi^{2n+1}_{i+1}\to\pi^n_{i-1}$ が存在して、次の完全系列（$EH\Delta$-系列という）が存在することがわかる。

$$\cdots\to\pi^n_i \xrightarrow{E} \pi^{n+1}_{i+1} \xrightarrow{H} \pi^{2n+1}_{i+1} \xrightarrow{\Delta} \pi^n_{i-1} \xrightarrow{E} \pi^{n+1}_i \xrightarrow{H} \cdots$$

（H は Hopf 準同型、Δ は球面のホモトピー群の Whitehead 積に関連する準同型であり、H および Δ のいずれも重要な準同型であるが、定義、性質の説明のためにはさらなる準備が必要となるため、本稿では略する。$EH\Delta$-系列は π_i^n の群構造の決定のための主道具となるものである。詳しくは Toda[T] を参照されたい。）

さらに、n を 2 以上の整数、$k,\ l$ を負でない整数として、球面のホモトピー群の合成は

$$\circ : \pi_{n+k}^n \times \pi_{n+k+l}^{n+k} \to \pi_{n+k+l}^n, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha \circ \beta$$

に制限されることがわかる。そしてやはり、一般に

$$\alpha \circ (\beta + \beta') = \alpha \circ \beta + \alpha \circ \beta', \qquad \alpha \in \pi_{n+k}^n,\ \beta, \beta' \in \pi_{n+k+l}^{n+k}$$

および

$$(\alpha + \alpha') \circ E\beta = \alpha \circ E\beta + \alpha' \circ E\beta, \qquad \alpha, \alpha' \in \pi_{n+k}^n,\ \beta, \in \pi_{n+k+l-1}^{n+k-1}$$

は成り立つが、一般に

$$(\alpha + \alpha') \circ \beta = \alpha \circ \beta + \alpha' \circ \beta, \qquad \alpha, \alpha' \in \pi_{n+k}^n,\ \beta, \in \pi_{n+k+l}^{n+k}$$

が成り立つとは限らないので注意が必要である。本稿ではこの合成 $\circ$ の計算を行う。

6　戸田括弧積について

戸田の生成元の構成法（の一部）について第 7 節で述べるため、この節では戸田括弧積の定義を Toda[T] から引用して述べる。

m を負でない整数とする。$(W, w_0), (X, x_0), (Y, y_0), (Z, z_0)$ を基点付き位相空間とし、$\alpha \in [E^m Y, Z]_*,\ \beta \in [X, Y]_*,\ \gamma \in [W, X]_*$ が

$$\alpha \circ E^m\beta = 0 \in [E^m X, Z]_*, \qquad \beta \circ \gamma = 0 \in [W, Y]_*$$

をみたしているとする。(0 は基点への定値写像のホモトピー類を一般に表すものとする。）いま、

$$\begin{aligned} &\alpha = [a],\ a \in \mathrm{Map}_*(E^m Y, Z), \\ &\beta = [b],\ b \in \mathrm{Map}_*(X, Y), \\ &\gamma = [c],\ c \in \mathrm{Map}_*(W, X) \end{aligned}$$

と代表元 a, b, c をとり、さらに（$*$ は基点への定値写像を一般に表すものとして）$a \circ E^m b$ と $*$ をつなぐホモトピー $A\colon E^m X \times I \to Z$、および、$b \circ c$ と $*$ をつなぐホモトピー $B\colon W \times I \to Y$ をとる。$t \in I,\ \tilde{x} \in E^m X,\ w \in W$ に対して $A_t(\tilde{x}) = A(\tilde{x}, t),\ B_t(w) = B(w, t)$ として $A_t\colon E^m X \to Z,\ B_t\colon W \to Y$ を定義する。

このとき、$H \in \mathrm{Map}_*(EE^m W, Z) = \mathrm{Map}_*(E^m W \wedge S^1, Z)$ を、$\tilde{w} \in E^m W,\ t \in I$ に対して

$$H(\tilde{w} \wedge (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)) = \begin{cases} a \circ E^m B_{2t-1}(\tilde{w}), & (\frac{1}{2} \leq t \leq 1) \\ A_{1-2t} \circ E^m c(\tilde{w}), & (0 \leq t \leq \frac{1}{2}) \end{cases}$$

とおくことによって定義することができる。そこで、戸田括弧積 $\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m \subset [EE^m W, Z]_*$ を上のようにして作ることのできる $H \in \mathrm{Map}_*(EE^m W, Z)$ のホモトピー類 $[H] \in [EE^m W, Z]_*$ 全体からなる集合として定義する。H の定義は代表元 a, b, c およびホモトピー A, B の取り方に依存する。したがって、$\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m$ は一般に一つのホモトピー類からなるとは限らない。

特に、n を 2 以上の整数、$k,\ l,\ q$ を負でない整数、m を $0 \leq m \leq k$ をみたす整数として、

$$W = S^{n+k+l+q-m}, \qquad X = S^{n+k+l-m}, \qquad Y = S^{n+k-m}, \qquad Z = S^n$$

の場合を考える。同相

$$EE^m W \cong S^{n+k+l+q+1}, \qquad E^m W \cong S^{n+k+l+q}, \qquad E^m X = S^{n+k+l}, \qquad E^m Y = S^{n+k}$$

によってこれらをそれぞれ同一視し、

$$\begin{aligned}
&\alpha \in [S^{n+k}, S^n]_* = \pi_{n+k}(S^n),\\
&\beta \in [S^{n+k+l-m}, S^{n+k-m}]_* = \pi_{n+k+l-m}(S^{n+k-m}),\\
&\gamma \in [S^{n+k+l+q-m}, S^{n+k+l-m}]_* = \pi_{n+k+l+q-m}(S^{n+k+l-m})
\end{aligned}$$

が

$$\begin{aligned}
\alpha \circ E^m\beta = 0 \in [S^{n+k+l}, S^n]_* = \pi_{n+k+l}(S^n),\\
\beta \circ \gamma = 0 \in [S^{n+k+l+q-m}, S^{n+k-m}]_* = \pi_{n+k+l+q-m}(S^{n+k-m})
\end{aligned}$$

をみたしているとする。このとき、

$$\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m \subset [S^{n+k+l+q+1}, S^n]_* = \pi_{n+k+l+q+1}(S^n)$$

となる。また、$\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m$ は $\pi_{n+k+l+q+1}(S^n)$ の部分群

$$\alpha \circ E^m\pi_{n+k+l+q+1-m}(S^{n+k-m}) + \pi_{n+k+l+1}(S^n) \circ E^{m+1}\gamma$$

による剰余類になることがわかる。さらに、

$$m \geq 1, \quad \alpha \in \pi_{n+k}(S^n;2) \subset \pi^n_{n+k}, \quad \gamma \in \pi_{n+k+l+q-m}(S^{n+k+l-m};2) \subset \pi^{n+k+l-m}_{n+k+l+q-m}$$

であるとき、

$$\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m \subset \pi^n_{n+k+l+q+1}$$

となり、かつ $\{\alpha, E^m\beta, E^m\gamma\}_m$ は $\pi^n_{n+k+l+q+1}$ の部分群

$$\alpha \circ E^m\pi^{n+k-m}_{n+k+l+q+1-m} + \pi^n_{n+k+l+1} \circ E^{m+1}\gamma$$

による剰余類になることもわかる。

7　戸田の生成元の集合の分割

これ以降、n は 2 以上の自然数、$k,\ l$ は自然数を表すものとする。

$n \geq 3,\ k \leq 11$ とする。π^n_{n+k} の Toda[T] の生成元の集合 g^n_{n+k} に対し、表 1 に示す元からなる部分集合 $d^n_{n+k},\ b^n_{n+k},\ s^n_{n+k},\ o^n_{n+k} \subset g^n_{n+k}$ を考え、目的とする合成の計算において用いる。（表 1 で $-$ と示している場合は該当する集合は空集合であるものとする。）

$d^n_{n+k},\ b^n_{n+k},\ s^n_{n+k},\ o^n_{n+k}$ の定め方の意図は以下の通りである。まず g^n_{n+k} の元のうち、懸垂準同型 E の像に含まれていて、かつ、正の stem の元の合成として明示的に表示されているものをまず b^n_{n+k} に分類した。（b は both の頭文字からとった。）また、懸垂準同型 E の像に含まれているが、正の stem の元の合成として明示的に表示されてはいないものを s^n_{n+k} に分類した。（s は suspension の頭文字からとった。）さらに、正の stem の元の合成として明示的に表示されているが、懸垂準同型 E の像に含まれていないものを d^n_{n+k} に分

類した。(d は decomposable の頭文字からとった。)最後に、上の 3 つのどれにも分類されていないものを o^n_{n+k} に分類した。(o は original の頭文字からとった。)

なお、表 1 には π^n_{n+k} も記した。(π^n_{n+12} については第 8 節に記した。)これらの群の生成元の定義と性質をいくつか以下に述べておく。さらに詳しい情報については Toda[T] を参照されたい。

- $\eta_2 \in \pi^2_3$ は $H(\eta_2) = \iota_3 \in \pi^3_3$ をみたす元である。また、$\eta_n = E^{n-2}\eta_2 \in \pi^n_{n+1}$, $\eta^2_n = \eta_n \circ \eta_{n+1} \in \pi^n_{n+2}$ $(n \geq 2)$ とおく。
- $\nu_4 \in \pi^4_7$ は $H(\nu_4) = \iota_7 \in \pi^7_7$ をみたす元である。また、$\nu_n = E^{n-4}\nu_4 \in \pi^n_{n+3}$, $\nu^2_n = \nu_n \circ \nu_{n+3} \in \pi^n_{n+6}$, $\nu^3_n = \nu_n \circ \nu_{n+3} \circ \nu_{n+6} \in \pi^n_{n+9}$, $\nu^4_n = \nu_n \circ \nu_{n+3} \circ \nu_{n+6} \circ \nu_{n+9} \in \pi^n_{n+12}$ $(n \geq 4)$ とおく。
- $\nu' \in \pi^3_6$ は $\nu' \in \{\eta_3, 2\iota_4, \eta_4\}_1 \subset \pi^3_6$, $E^2\nu' = 2\nu_5 \in \pi^5_8$, $H(\nu') = \eta_5 \in \pi^5_6$ をみたす元である。
- $\sigma_8 \in \pi^8_{15}$ は $H(\sigma_8) = \iota_{15} \in \pi^{15}_{15}$ をみたす元である。また、$\sigma_n = E^{n-8}\sigma_8 \in \pi^n_{n+7}$ $(n \geq 8)$ とおく。
- $\sigma' \in \pi^7_{14}$ は $E^2\sigma' = 2\sigma_9 \in \pi^9_{16}$, $H(\sigma') = \eta_{13} \in \pi^{13}_{14}$ をみたす元である。
- $\sigma'' \in \pi^6_{13}$ は $E\sigma'' = 2\sigma' \in \pi^7_{14}$, $H(\sigma'') = \eta^2_{11} \in \pi^{11}_{13}$ をみたす元である。
- $\sigma''' \in \pi^5_{12}$ は $\sigma''' \in \{\nu_5, 8\iota_8, \nu_8\}_t \subset \pi^5_{12}$ $(0 \leq t \leq 3)$, $E\sigma''' = 2\sigma'' \in \pi^6_{13}$, $H(\sigma''') = 4\nu_9 \in \pi^9_{12}$ をみたす元である。
- $\varepsilon_3 \in \pi^3_{11}$ は $\varepsilon_3 \in \{\eta_3, E\nu', \nu_7\}_1 \subset \pi^3_{11}$, $H(\varepsilon_3) = \nu^2_5 \in \pi^5_{11}$ をみたす元である。また、$\varepsilon_n = E^{n-3}\varepsilon_3 \in \pi^n_{n+8}$ $(n \geq 3)$ とおく。
- $\bar{\nu}_6 \in \pi^6_{14}$ は $\bar{\nu}_6 \in \{\nu_6, \eta_9, \nu_{10}\}_t \subset \pi^6_{14}$ $(0 \leq t \leq 4), H(\bar{\nu}_6) \equiv \nu_{11} \in \pi^{11}_{14} \mod 2\nu_{11}$ をみたす元である。また、$\bar{\nu}_n = E^{n-6}\bar{\nu}_6 \in \pi^n_{n+8}$ $(n \geq 6)$ とおく。
- $\mu_3 \in \pi^3_{12}$ は $H(\mu_3) = \sigma''' \in \pi^5_{12}$ をみたす元である。また、$\mu_n = E^{n-3}\mu_3 \in \pi^n_{n+9}$ $(n \geq 3)$ とおく。
- $\varepsilon' \in \pi^3_{13}$ は $\varepsilon' \in \{\nu', 2\nu_6, \nu_9\}_3 \subset \pi^3_{13}$, $H(\varepsilon') = \varepsilon_5 \in \pi^5_{13}$ をみたす元である。
- $\mu' \in \pi^3_{14}$ は $\mu' \in \{\eta_3, 2\iota_4, \mu_4\}_1 \subset \pi^3_{14}$, $H(\mu') = \mu_5 \in \pi^5_{14}$ をみたす元である。
- $\zeta_5 \in \pi^5_{16}$ は $\zeta_5 \in \{\nu_5, 8\iota_8, E\sigma'\}_1 \subset \pi^5_{16}$, $H(\zeta_5) = 8\sigma_9 \in \pi^9_{16}$ をみたす元である。また、$\zeta_n = E^{n-5}\zeta_5 \in \pi^n_{n+11}$ $(n \geq 5)$ とおく。
- $\theta' \in \pi^{11}_{23}$ は $\theta' \in \{\sigma_{11}, 2\nu_{18}, \eta_{21}\}_1 \subset \pi^{11}_{23}$, $H(\theta') = \eta^2_{21} \in \pi^{21}_{23}$ をみたす元である。
- $\theta \in \pi^{12}_{24}$ は $\theta \in \{\sigma_{12}, \nu_{19}, \eta_{22}\}_1 \subset \pi^{12}_{24}$, $H(\theta) = \eta_{23} \in \pi^{23}_{24}$ をみたす元である。

表 1　分割された戸田の生成元 d^n_{n+k}，b^n_{n+k}，s^n_{n+k}，o^n_{n+k} および群 π^n_{n+k} $(n \geq 3,\ k \leq 11)$

k	n	$n+k$	d^n_{n+k}	b^n_{n+k}	s^n_{n+k}	o^n_{n+k}	π^n_{n+k}
1	3	4	–	–	–	η_3	$\mathbb{Z}_2\{\eta_3\}$
	≥ 4	≥ 5	–	–	η_n	–	$\mathbb{Z}_2\{\eta_n\}$
2	3	5	η_3^2	–	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\eta_3^2\}$
	≥ 4	≥ 6	–	η_n^2	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\eta_n^2\}$
3	3	6	–	–	–	ν'	$\mathbb{Z}_4\{\nu'\}$
	4	7	–	–	$E\nu'$	ν_4	$\mathbb{Z}\{\nu_4\} \oplus \mathbb{Z}_4\{E\nu'\}$
	≥ 5	≥ 8	–	–	ν_n	–	$\mathbb{Z}_8\{\nu_n\}$
4	3	7	$\nu' \circ \eta_6$	–	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu' \circ \eta_6\}$
	4	8	$\nu_4 \circ \eta_7$	$E\nu' \circ \eta_7$	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \eta_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\nu' \circ \eta_7\}$
	5	9	–	$\nu_5 \circ \eta_8$	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_5 \circ \eta_8\}$
	≥ 6	≥ 10	–	–	–	–	0
5	3	8	$\nu' \circ \eta_6^2$	–	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu' \circ \eta_6^2\}$
	4	9	$\nu_4 \circ \eta_7^2$	$E\nu' \circ \eta_7^2$	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \eta_7^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\nu' \circ \eta_7^2\}$
	5	10	–	$\nu_5 \circ \eta_8^2$	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_5 \circ \eta_8^2\}$
	6	11	–	–	–	$\Delta(\iota_{13})$	$\mathbb{Z}\{\Delta(\iota_{13})\}$
	≥ 7	≥ 12	–	–	–	–	0
6	3	9	–	–	–	–	0
	4	10	ν_4^2	–	–	–	$\mathbb{Z}_8\{\nu_4^2\}$
	5	11	–	ν_5^2	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_5^2\}$
	6	12	–	ν_6^2	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_6^2\}$
	7	13	–	ν_7^2	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_7^2\}$
	≥ 8	≥ 14	–	ν_n^2	–	–	$\mathbb{Z}_2\{\nu_n^2\}$
7	3	10	–	–	–	–	0
	4	11	–	–	–	–	0
	5	12	–	–	–	σ'''	$\mathbb{Z}_2\{\sigma'''\}$
	6	13	–	–	–	σ''	$\mathbb{Z}_4\{\sigma''\}$
	7	14	–	–	–	σ'	$\mathbb{Z}_8\{\sigma'\}$
	8	15	–	–	$E\sigma'$	σ_8	$\mathbb{Z}\{\sigma_8\} \oplus \mathbb{Z}_8\{E\sigma'\}$
	≥ 9	≥ 16	–	–	σ_n	–	$\mathbb{Z}_{16}\{\sigma_n\}$
8	3	11	–	–	–	ε_3	$\mathbb{Z}_2\{\varepsilon_3\}$
	4	12	–	–	ε_4	–	$\mathbb{Z}_2\{\varepsilon_4\}$
	5	13	–	–	ε_5	–	$\mathbb{Z}_2\{\varepsilon_5\}$
	6	14	–	–	ε_6	$\bar{\nu}_6$	$\mathbb{Z}_8\{\bar{\nu}_6\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\varepsilon_6\}$
	7	15	$\sigma' \circ \eta_{14}$	–	$\bar{\nu}_7$，ε_7	–	$\mathbb{Z}_2\{\sigma' \circ \eta_{14}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\bar{\nu}_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\varepsilon_7\}$
	8	16	$\sigma_8 \circ \eta_{15}$	$E\sigma' \circ \eta_{15}$	$\bar{\nu}_8$，ε_8	–	$\mathbb{Z}_2\{\sigma_8 \circ \eta_{15}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\sigma' \circ \eta_{15}\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\bar{\nu}_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\varepsilon_8\}$
	9	17	–	$\sigma_9 \circ \eta_{16}$	$\bar{\nu}_9$，ε_9	–	$\mathbb{Z}_2\{\sigma_9 \circ \eta_{16}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\bar{\nu}_9\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\varepsilon_9\}$
	≥ 10	≥ 18	–	–	$\bar{\nu}_n$，ε_n	–	$\mathbb{Z}_2\{\bar{\nu}_n\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\varepsilon_n\}$

k	n	$n+k$	d^n_{n+k}	b^n_{n+k}	s^n_{n+k}	o^n_{n+k}	π^n_{n+k}
9	3	12	$\eta_3 \circ \varepsilon_4$	$-$	$-$	μ_3	$\mathbb{Z}_2\{\mu_3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_3 \circ \varepsilon_4\}$
	4	13	ν_4^3	$\eta_4 \circ \varepsilon_5$	μ_4	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\nu_4^3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_4\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_4 \circ \varepsilon_5\}$
	5	14	$-$	$\nu_5^3,\ \eta_5 \circ \varepsilon_6$	μ_5	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\nu_5^3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_5\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_5 \circ \varepsilon_6\}$
	6	15	$-$	$\nu_6^3,\ \eta_6 \circ \varepsilon_7$	μ_6	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\nu_6^3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_6\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_6 \circ \varepsilon_7\}$
	7	16	$\sigma' \circ \eta_{14}^2$	$\nu_7^3,\ \eta_7 \circ \varepsilon_8$	μ_7	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\sigma' \circ \eta_{14}^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_7^3\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_7 \circ \varepsilon_8\}$
	8	17	$\sigma_8 \circ \eta_{15}^2$	$E\sigma' \circ \eta_{15}^2,$ $\nu_8^3,\ \eta_8 \circ \varepsilon_9$	μ_8	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\sigma_8 \circ \eta_{15}^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\sigma' \circ \eta_{15}^2\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_8^3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_8 \circ \varepsilon_9\}$
	9	18	$-$	$\sigma_9 \circ \eta_{16}^2,$ $\nu_9^3,\ \eta_9 \circ \varepsilon_{10}$	μ_9	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\sigma_9 \circ \eta_{16}^2\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_9^3\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_9\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_9 \circ \varepsilon_{10}\}$
	10	19	$-$	$\nu_{10}^3,\ \eta_{10} \circ \varepsilon_{11}$	μ_{10}	$\Delta(\iota_{21})$	$\mathbb{Z}\{\Delta(\iota_{21})\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_{10}^3\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_{10}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_{10} \circ \varepsilon_{11}\}$
	≥ 11	≥ 20	$-$	$\nu_n^3,\ \eta_n \circ \varepsilon_{n+1}$	μ_n	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\nu_n^3\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\mu_n\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_n \circ \varepsilon_{n+1}\}$
10	3	13	$\eta_3 \circ \mu_4$	$-$	$-$	ε'	$\mathbb{Z}_4\{\varepsilon'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_3 \circ \mu_4\}$
	4	14	$\nu_4 \circ \sigma'$	$\eta_4 \circ \mu_5$	$E\varepsilon'$	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\nu_4 \circ \sigma'\} \oplus \mathbb{Z}_4\{E\varepsilon'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_4 \circ \mu_5\}$
	5	15	$\nu_5 \circ \sigma_8$	$\eta_5 \circ \mu_6$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\nu_5 \circ \sigma_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_5 \circ \mu_6\}$
	6	16	$-$	$\nu_6 \circ \sigma_9,\ \eta_6 \circ \mu_7$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\nu_6 \circ \sigma_9\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_6 \circ \mu_7\}$
	7	17	$-$	$\nu_7 \circ \sigma_{10},\ \eta_7 \circ \mu_8$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\nu_7 \circ \sigma_{10}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_7 \circ \mu_8\}$
	8	18	$\sigma_8 \circ \nu_{15}$	$\nu_8 \circ \sigma_{11},\ \eta_8 \circ \mu_9$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\sigma_8 \circ \nu_{15}\} \oplus \mathbb{Z}_8\{\nu_8 \circ \sigma_{11}\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_8 \circ \mu_9\}$
	9	19	$-$	$\sigma_9 \circ \nu_{16},\ \eta_9 \circ \mu_{10}$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\sigma_9 \circ \nu_{16}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_9 \circ \mu_{10}\}$
	10	20	$-$	$\sigma_{10} \circ \nu_{17},\ \eta_{10} \circ \mu_{11}$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_4\{\sigma_{10} \circ \nu_{17}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_{10} \circ \mu_{11}\}$
	11	21	$-$	$\sigma_{11} \circ \nu_{18},\ \eta_{11} \circ \mu_{12}$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\sigma_{11} \circ \nu_{18}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\eta_{11} \circ \mu_{12}\}$
	≥ 12	≥ 22	$-$	$\eta_n \circ \mu_{n+1}$	$-$	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\eta_n \circ \mu_{n+1}\}$
11	3	14	$\varepsilon_3 \circ \nu_{11},$ $\nu' \circ \varepsilon_6$	$-$	$-$	μ'	$\mathbb{Z}_4\{\mu'\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\varepsilon_3 \circ \nu_{11}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu' \circ \varepsilon_6\}$
	4	15	$\nu_4 \circ \sigma' \circ \eta_{14},$ $\nu_4 \circ \bar{\nu}_7,$ $\nu_4 \circ \varepsilon_7$	$\varepsilon_4 \circ \nu_{12},\ E\nu' \circ \varepsilon_7$	$E\mu'$	$-$	$\mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \sigma' \circ \eta_{14}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \bar{\nu}_7\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \varepsilon_7\} \oplus \mathbb{Z}_4\{E\mu'\}$ $\oplus \mathbb{Z}_2\{\varepsilon_4 \circ \nu_{12}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\nu' \circ \varepsilon_7\}$
	5	16	$-$	$\nu_5 \circ \bar{\nu}_8,\ \nu_5 \circ \varepsilon_8$	$-$	ζ_5	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_5\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_5 \circ \bar{\nu}_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_5 \circ \varepsilon_8\}$
	6	17	$\bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}$	$-$	ζ_6	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_6\} \oplus \mathbb{Z}_4\{\bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}\}$
	7	18	$-$	$\bar{\nu}_7 \circ \nu_{15}$	ζ_7	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\bar{\nu}_7 \circ \nu_{15}\}$
	8	19	$-$	$\bar{\nu}_8 \circ \nu_{16}$	ζ_8	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\bar{\nu}_8 \circ \nu_{16}\}$
	9	20	$-$	$\bar{\nu}_9 \circ \nu_{17}$	ζ_9	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_9\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\bar{\nu}_9 \circ \nu_{17}\}$
	10	21	$-$	$-$	ζ_{10}	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_{10}\}$
	11	22	$-$	$-$	ζ_{11}	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_{11}\}$
	12	23	$-$	$-$	ζ_{12}	$\Delta(\iota_{25})$	$\mathbb{Z}\{\Delta(\iota_{25})\} \oplus \mathbb{Z}_8\{\zeta_{12}\}$
	≥ 13	≥ 24	$-$	$-$	ζ_n	$-$	$\mathbb{Z}_8\{\zeta_n\}$

8 π^n_{n+12} の群構造

ここでは、π^n_{n+12} $(n \geq 3)$ の群構造を Toda[T] から引用する。stem の和が 12 の場合の合成の結果はこれらの群に値をもつことになる。

- $\pi^3_{15} = \mathbb{Z}_2\{\nu' \circ \mu_6\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu' \circ \eta_6 \circ \varepsilon_7\}$
- $\pi^4_{16} = \mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \sigma' \circ \eta^2_{14}\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu^4_4\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \mu_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_4 \circ \eta_7 \circ \varepsilon_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\nu' \circ \mu_7\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\nu' \circ \eta_7 \circ \varepsilon_8\}$
- $\pi^5_{17} = \mathbb{Z}_2\{\nu^4_5\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_5 \circ \mu_8\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\nu_5 \circ \eta_8 \circ \varepsilon_9\}$
- $\pi^6_{18} = \mathbb{Z}_{16}\{\Delta(\sigma_{13})\} = \mathbb{Z}_{16}\{\Delta(\iota_{13}) \circ \sigma_{11}\}$
- $\pi^7_{19} = \pi^8_{20} = \pi^9_{21} = 0$
- $\pi^{10}_{22} = \mathbb{Z}_4\{\Delta(\nu_{21})\} = \mathbb{Z}_4\{\Delta(\iota_{21}) \circ \nu_{19}\}$
- $\pi^{11}_{23} = \mathbb{Z}_2\{\theta'\}$
- $\pi^{12}_{24} = \mathbb{Z}_2\{\theta\} \oplus \mathbb{Z}_2\{E\theta'\} = \mathbb{Z}_2\{\theta\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\Delta(\eta_{25})\} = \mathbb{Z}_2\{\theta\} \oplus \mathbb{Z}_2\{\Delta(\iota_{25}) \circ \eta_{23}\}$
- $\pi^{13}_{25} = \mathbb{Z}_2\{E\theta\} = \mathbb{Z}_2\{\Delta(\iota_{27})\}$
- $\pi^n_{n+12} = 0 \quad (n \geq 14)$

なお、$E\theta' = \Delta(\eta_{25})$ および $E\theta = \Delta(\iota_{27})$ であることは [T] (7.30) で述べられている。また、$\Delta(\sigma_{13}) = \Delta(\iota_{13}) \circ \sigma_{11}$、$\Delta(\nu_{21}) = \Delta(\iota_{21}) \circ \nu_{19}$、および $\Delta(\eta_{25}) = \Delta(\iota_{25}) \circ \eta_{23}$ は Toda[T] Prop. 2.5 からわかる。

9 懸垂準同型について

ここでは $\pi^n_{n+k}\,(n \geq 3,\ k \leq 12)$ における懸垂準同型

$$E \colon \pi^n_{n+k} \to \pi^{n+1}_{n+k+1}$$

の計算を記し（ただし、自明なものについては省略した）、それらが一部の符号を除き全て計算可能であることを確認する。この計算結果により、第 7 節で導入した生成元の分割

$$g^n_{n+k} = d^n_{n+k} \cup b^n_{n+k} \cup s^n_{n+k} \cup o^n_{n+k}$$

の良い性質を確認することができる。（後に述べる命題を参照。）この命題を第 10 節での考察に用いる。

- $E(E\nu') = E^2\nu' = 2\nu_5$ $\quad\because$ [T] (5.5)
- $E(E\nu' \circ \eta_7) = E^2\nu' \circ \eta_8 = 2\nu_5 \circ \eta_8 = 0$ $\quad\because$ [T] (5.5)
- $E(\nu_5 \circ \eta_8) = \nu_6 \circ \eta_9 = 0$ $\quad\because$ [T] (5.9)
- $E(E\nu' \circ \eta^2_7) = E^2\nu' \circ \eta^2_8 = 2\nu_5 \circ \eta^2_8 = 0$ $\quad\because$ [T] (5.5)
- $E(\nu_5 \circ \eta^2_8) = \nu_6 \circ \eta^2_9 = 0$ $\quad\because$ [T] (5.9)
- $E\sigma''' = 2\sigma''$ $\quad\because$ [T] Lem 5.14
- $E\sigma'' = 2\sigma'$ $\quad\because$ [T] Lem 5.14
- $E(E\sigma') = E^2\sigma' = 2\sigma_9$ $\quad\because$ [T] Lem 5.14
- $E(E\sigma' \circ \eta_{15}) = E^2\sigma' \circ \eta_{16} = 2\sigma_9 \circ \eta_{16} = 0$ $\quad\because$ [T] Lem.5.14
- $E(\sigma_9 \circ \eta_{16}) = \sigma_{10} \circ \eta_{17} = \bar{\nu}_{10} + \varepsilon_{10}$ $\quad\because$ [T] Lem.6.4
- $E(E\sigma' \circ \eta^2_{15}) = E^2\sigma' \circ \eta^2_{16} = 2\sigma_9 \circ \eta^2_{16} = 0$ $\quad\because$ [T] Lem.5.14
- $E(\sigma_9 \circ \eta^2_{16}) = \sigma_{10} \circ \eta^2_{17} = (\bar{\nu}_{10} + \varepsilon_{10}) \circ \eta_{18} = \nu^3_{10} + \eta_{10} \circ \varepsilon_{11}$ $\quad\because$ [T] Lem.6.4, Lem.6.3, (7.5)
- $E(\nu_4 \circ \sigma') = \nu_5 \circ E\sigma' = 2(\nu_5 \circ \sigma_8)$ $\quad\because$ [T] (7.16)
- $E(E\varepsilon') = E^2\varepsilon' = \pm 2(\nu_5 \circ \sigma_8)$ $\quad\because$ [T] (7.10)

- $E(\nu_8 \circ \sigma_{11}) = \nu_9 \circ \sigma_{12} = \pm 2\sigma_9 \circ \nu_{16}$

  $\because$ [T] (7.19) より、$x\,\nu_9 \circ \sigma_{12} = 2\sigma_9 \circ \nu_{16}$ （x は奇数）である。よって、$x^2\,\nu_9 \circ \sigma_{12} = 2x\,\sigma_9 \circ \nu_{16}$ である。$8\nu_9 \circ \sigma_{12} = 0$ であり、$x^2 \equiv 1 \pmod 8$ であるから、$\nu_9 \circ \sigma_{12} = 2x\,\sigma_9 \circ \nu_{16} = \pm 2\sigma_9 \circ \nu_{16}$ となる。
- $E(\sigma_{11} \circ \nu_{18}) = \sigma_{12} \circ \nu_{19} = 0$ $\because$ [T] (7.20)
- $E(\nu_4 \circ \sigma' \circ \eta_{14}) = \nu_5 \circ E\sigma' \circ \eta_{15} = 2(\nu_5 \circ \sigma_8) \circ \eta_{15} = (\nu_5 \circ \sigma_8) \circ 2\eta_{15} = 0$ $\because$ [T] (7.16)
- $E(\varepsilon_4 \circ \nu_{12}) = E\Delta(\bar{\nu}_9) = 0$ $\because$ [T] (7.13)
- $E(E\nu' \circ \varepsilon_7) = 2\nu_5 \circ \varepsilon_8 = \nu_5 \circ 2\varepsilon_8 = 0$ $\because$ [T] (5.5)
- $E(E\mu') = E^2\mu' = \pm 2\zeta_5$ $\because$ [T] (7.14)
- $E(\nu_5 \circ \bar{\nu}_8) = \nu_6 \circ \bar{\nu}_9 = \nu_6 \circ \varepsilon_9 = 2\bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}$ $\because$ [T] (7.17), (7.18)
- $E(\nu_5 \circ \varepsilon_8) = \nu_6 \circ \varepsilon_9 = 2\bar{\nu}_6 \circ \nu_{14}$ $\because$ [T] (7.18)
- $E(\bar{\nu}_9 \circ \nu_{17}) = E\Delta(\nu_{19}) = 0$ $\because$ [T] (7.22)
- $E(\nu_4 \circ \sigma' \circ \eta_{14}^2) = \nu_5 \circ E\sigma' \circ \eta_{15}^2 = 2(\nu_5 \circ \sigma_8) \circ \eta_{15}^2 = 0$ $\because$ [T] (7.16)
- $E(E\nu' \circ \mu_7) = E^2\nu' \circ \mu_8 = 2\nu_5 \circ \mu_8 = 0$ $\because$ [T] (5.5)
- $E(E\nu' \circ \eta_7 \circ \varepsilon_8) = E^2\nu' \circ \eta_8 \circ \varepsilon_9 = 2\nu_5 \circ \eta_8 \circ \varepsilon_9 = 0$ $\because$ [T] (5.5)
- $E\nu_5^4 = E\Delta(\bar{\nu}_{11}) = 0$ $\because$ [T] P77
- $E(\nu_5 \circ \mu_8) = \nu_6 \circ \mu_9 = 8\Delta(\sigma_{13}) = 8\Delta(\iota_{13}) \circ \sigma_{11}$ $\because$ [T] (7.25)
- $E(\nu_5 \circ \eta_8 \circ \varepsilon_9) = E\Delta(\varepsilon_{11}) = 0$ $\because$ [T] P77

これらを用いると、次の命題が成り立つことが容易に確認できる。

命題 d^n_{n+k}, b^n_{n+k}, s^n_{n+k}, o^n_{n+k} は以下の性質をみたす（$n \geq 3,\ k \leq 11$）。

(1) d^n_{n+k}, b^n_{n+k}, s^n_{n+k}, o^n_{n+k} はどの 2 つも共通部分をもたない。

(2) $g^n_{n+k} = d^n_{n+k} \cup b^n_{n+k} \cup s^n_{n+k} \cup o^n_{n+k}$ である。

(3) $d^n_{n+k} \cup b^n_{n+k}$ に属する元は全て低い stem の戸田の生成元の合成で表される。すなわち、

$$d^n_{n+k} \cup b^n_{n+k} \subset \bigcup_{i=1}^{k-1} g^n_{n+i} \circ g^{n+i}_{n+k} = \bigcup_{i=1}^{k-1} \{\alpha' \circ \alpha'' | \alpha' \in g^n_{n+i},\ \alpha'' \in g^{n+i}_{n+k}\}$$

である。

(4) $b^3_{3+k} = s^3_{3+k} = \emptyset$ である。

(5) $b^n_{n+k} \cup s^n_{n+k}$ に属する元は全て懸垂準同型による戸田の生成元の像になっている。すなわち、

$$b^n_{n+k} \cup s^n_{n+k} \subset E(g^{n-1}_{n+k-1}) = \mathrm{Im}(E|_{g^{n-1}_{n+k-1}} : g^{n-1}_{n+k-1} \to \pi^n_{n+k})$$

である。

10 合成構造について

以下、$k + l \leq 12$ に対して、合成

$$\circ \colon g^n_{n+k} \times g^{n+k}_{n+k+l} \to \pi^n_{n+k+l}$$

を計算する。すなわち、

$$\alpha \in g^n_{n+k} = d^n_{n+k} \cup b^n_{n+k} \cup s^n_{n+k} \cup o^n_{n+k}$$
$$\beta \in g^{n+k}_{n+k+l} = d^{n+k}_{n+k+l} \cup b^{n+k}_{n+k+l} \cup s^{n+k}_{n+k+l} \cup o^{n+k}_{n+k+l}$$

に対して、$\alpha \circ \beta$ を戸田の生成元の一次結合で表す。

計算は自然数の 3 つ組 $(k+l, k, n)$ に関する辞書式順序によって段階的に行うが、考えるべき範囲を削減するためにいくつかの一般的考察をここで行う。

まず、同型 $\eta_2\circ\colon \pi^3_{3+i} \xrightarrow{\cong} \pi^2_{3+i}$（$i$ は負でない整数）により、$n=2$ の場合は $n=3$ の場合に帰着できる。また、$n \geq k+2$ のとき π^n_{n+k} は安定域にある（すなわち $E\colon \pi^n_{n+k} \to \pi^{n+1}_{n+k+1}$ が同型である）ので、$n \geq k+3$ のとき、$\alpha \in g^n_{n+k}$ に対して $\alpha' \in g^{n-1}_{n+k-1}$ が存在して、$\alpha = E\alpha'$ となる。同様に、$n+k \geq l+3$ のとき、$\beta \in g^{n+k}_{n+k+l}$ に対して $\beta' \in g^{n+k-1}_{n+k+l-1}$ が存在して、$\beta = E\beta'$ となる。したがって、$n \geq \max\{k, l-k\}+3 \geq 4$ のとき、$\alpha \in g^n_{n+k},\ \beta \in g^{n+k}_{n+k+l}$ に対して上記のような α', β' がともに存在して、$\alpha\circ\beta = E\alpha' \circ E\beta' = E(\alpha'\circ\beta')$ となる。ここで $\alpha'\circ\beta'$ は前の段階で計算されており、$E\colon \pi^{n-1}_{n+k+l-1} \to \pi^n_{n+k+l}$ も第 9 節で述べたように既知であるので、$\alpha\circ\beta$ は計算できる。したがって、$3 \leq n \leq \max\{k, l-k\}+2$ の範囲で考えれば十分である。

同様の理由で、$\alpha \in b^n_{n+k} \cup s^n_{n+k}$ かつ $\beta \in b^{n+k}_{n+k+l} \cup s^{n+k}_{n+k+l}$ のときも、$\alpha' \in g^{n-1}_{n+k-1},\ \beta' \in g^{n+k-1}_{n+k+l-1}$ が存在して $\alpha = E\alpha',\ \beta = E\beta',\ \alpha\circ\beta = E(\alpha'\circ\beta')$ となるので、$\alpha\circ\beta$ は計算できる。($b^3_{3+k} \cup s^3_{3+k} = \emptyset$ としていたので $n \geq 4$ の場合で考えればよく、$\alpha'\circ\beta'$ は確かに前の段階で計算されている。)

さらに、$\alpha \in d^n_{n+k} \cup b^n_{n+k}$ のとき、（$k \geq 2$ であって）$1 \leq i \leq k-1$ なる i が存在して $\alpha = \alpha'\circ\alpha'',\ \alpha' \in g^n_{n+i},\ \alpha'' \in g^{n+i}_{n+k}$ となる。ゆえに、

$$\alpha\circ\beta = (\alpha'\circ\alpha'')\circ\beta = \alpha'\circ(\alpha''\circ\beta)$$

となるが、これは前の段階で計算されている。

以上の考察により、次の定理を示せば合成

$$\circ : g^n_{n+k} \times g^{n+k}_{n+k+l} \to \pi^n_{n+k+l}, \qquad (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\circ\beta$$

を $k+l \leq 12$ の場合について（一部の未決定な場合を除き）計算できることがわかった。

定理 $k+l \leq 12,\ 3 \leq n \leq \max\{k, l-k\}+2$ とする。このとき

$$(\alpha, \beta) \in \left(s^n_{n+k} \times (d^{n+k}_{n+k+l} \cup o^{n+k}_{n+k+l})\right) \bigcup \left(o^n_{n+k} \times g^{n+k}_{n+k+l}\right)$$

に対して $\alpha\circ\beta$ は表 2 によって与えられる。(ただし、$\alpha\circ\beta \in g^n_{n+k+l}$ となっている場合については省略している。また、$V = (n, n+k, n+k+l)$ とおいた。)

注意 実際の計算では、例えば以下のような点に注意すると、計算を効率的に進めることができる。

- $k = 2,\ 4,\ 6$ のときは $s^n_{n+k} = o^n_{n+k} = \emptyset$ であるので、$k \neq 2,\ 4,\ 6$ としてよい。
- $n \neq 6$ のとき $s^n_{n+5} = o^n_{n+5} = \emptyset$ であるので、$k=5$ のときは $n=6$ のときのみ考えればよい。
- $n \neq 3,\ 4$ のとき $s^n_{n+10} = o^n_{n+10} = \emptyset$ であるので、$k=10$ のときは $n=3,\ 4$ のときのみ考えればよい。
- $n+k \geq 6$ のとき $g^{n+k}_{n+k+4} = \emptyset$ であるので、$l=4$ のときは $n+k \leq 5$ のときのみ考えればよい。
- $n+k \geq 7$ のとき $g^{n+k}_{n+k+5} = \emptyset$ であるので、$l=5$ のときは $n+k \leq 6$ のときのみ考えればよい。

表2　$(\alpha,\beta) \in \left(s^n_{n+k} \times (d^{n+k}_{n+k+l} \cup o^{n+k}_{n+k+l})\right) \bigcup \left(o^n_{n+k} \times g^{n+k}_{n+k+l}\right)$ $(k+l \le 12,\ 3 \le n \le \max\{k, l-k\}+2)$
に対する $\alpha \circ \beta$ （ただし、$\alpha \circ \beta \in g^n_{n+k+l}$ となっている場合については省略）

	$k+l$	k	l	n	V	α	β	$\alpha \circ \beta$	備考
(1)	3	1	2	3	$(3,4,6)$	η_3	η_4^2	$2\nu'$	[T] (5.3)
(2)	4	1	3	3	$(3,4,7)$	η_3	$E\nu'$	0	[T] Lem. 5.7
(3)	4	1	3	3	$(3,4,7)$	η_3	ν_4	$\nu' \circ \eta_6$	[T] (5.9)
(4)	5	1	4	3	$(3,4,8)$	η_3	$\nu_4 \circ \eta_7$	$\nu' \circ \eta_6^2$	(3)
(5)	5	1	4	3	$(3,4,8)$	η_3	$E\nu' \circ \eta_7$	0	(2)
(6)	6	1	5	3	$(3,4,9)$	η_3	$\nu_4 \circ \eta_7^2$	0	
(7)	6	1	5	3	$(3,4,9)$	η_3	$E\nu' \circ \eta_7^2$	0	
(8)	6	1	5	5	$(5,6,11)$	η_5	$\Delta(\iota_{13})$	0	
(9)	6	3	3	3	$(3,6,9)$	ν'	ν_6	0	
(10)	6	5	1	6	$(6,11,12)$	$\Delta(\iota_{13})$	η_{11}	0	[T] (5.13)
(11)	7	1	6	3	$(3,4,10)$	η_3	ν_4^2	0	
(12)	7	5	2	6	$(6,11,13)$	$\Delta(\iota_{13})$	η_{11}^2	0	(10)
(13)	8	1	7	4	$(4,5,12)$	η_4	σ'''	0	[T] (7.4)
(14)	8	1	7	5	$(5,6,13)$	η_5	σ''	0	[T] (7.4)
(15)	8	1	7	6	$(6,7,14)$	η_6	σ'	$4\bar{\nu}_6$	[T] (7.4)
(16)	8	1	7	7	$(7,8,15)$	η_7	σ_8	$\sigma' \circ \eta_{14} + \bar{\nu}_7 + \varepsilon_7$	[T] (7.4)
(17)	8	3	5	3	$(3,6,11)$	ν'	$\Delta(\iota_{13})$	0	
(18)	8	5	3	6	$(6,11,14)$	$\Delta(\iota_{13})$	ν_{11}	$\pm 2\bar{\nu}_6$	[T] Lem. 6.2
(19)	8	7	1	5	$(5,12,13)$	σ'''	η_{12}	0	[T] (7.4)
(20)	8	7	1	6	$(6,13,14)$	σ''	η_{13}	$4\bar{\nu}_6$	[T] (7.4)
(21)	9	1	8	5	$(5,6,14)$	η_5	$\bar{\nu}_6$	ν_5^3	[T] (7.3)
(22)	9	1	8	6	$(6,7,15)$	η_6	$\sigma' \circ \eta_{14}$	0	
(23)	9	1	8	7	$(7,8,16)$	η_7	$\sigma_8 \circ \eta_{15}$	$\sigma' \circ \eta_{14}^2 + \nu_7^3 + \eta_7 \circ \varepsilon_8$	
(24)	9	3	6	3	$(3,6,12)$	ν'	ν_6^2	0	(9)
(25)	9	7	2	5	$(5,12,14)$	σ'''	η_{12}^2	0	(19)
(26)	9	7	2	6	$(6,13,15)$	σ''	η_{13}^2	0	
(27)	9	8	1	3	$(3,11,12)$	ε_3	η_{11}	$\eta_3 \circ \varepsilon_4$	[T] (7.5)
(28)	9	8	1	6	$(6,14,15)$	$\bar{\nu}_6$	η_{14}	ν_6^3	[T] Lem. 6.3
(29)	10	1	9	3	$(3,4,13)$	η_3	ν_4^3	0	(11)
(30)	10	1	9	3	$(3,4,13)$	η_3	$\eta_4 \circ \varepsilon_5$	$2\varepsilon'$	[T] Lem. 6.6
(31)	10	1	9	6	$(6,7,16)$	η_6	$\sigma' \circ \eta_{14}^2$	0	(22)
(32)	10	1	9	7	$(7,8,17)$	η_7	$\sigma_8 \circ \eta_{15}^2$	0	
(33)	10	1	9	9	$(9,10,19)$	η_9	$\Delta(\iota_{21})$	$4\sigma_9 \circ \nu_{16}$	
(34)	10	3	7	3	$(3,6,13)$	ν'	σ''	0	[Og2] Prop. (2.2)(1)
(35)	10	3	7	4	$(4,7,14)$	$E\nu'$	σ'	$2E\varepsilon'$	[Og2] Prop. (2.2)(1)
(36)	10	7	3	5	$(5,12,15)$	σ'''	ν_{12}	$4(\nu_5 \circ \sigma_8)$	

	$k+l$	k	l	n	V	α	β	$\alpha\circ\beta$	備考
(37)	10	7	3	6	$(6,13,16)$	σ''	ν_{13}	$\pm 2\nu_6\circ\sigma_9$	[Og2] Prop. (2.2)(1)
(38)	10	7	3	7	$(7,14,17)$	σ'	ν_{14}	$x\,\nu_7\circ\sigma_{10}$（x は奇数）	[T] (7.19)
(39)	10	8	2	3	$(3,11,13)$	ε_3	η_{11}^2	$2\varepsilon'$	
(40)	10	8	2	6	$(6,14,16)$	$\bar\nu_6$	η_{14}^2	0	
(41)	10	9	1	3	$(3,12,13)$	μ_3	η_{12}	$\eta_3\circ\mu_4$	[Og2] Prop. (2.2)(2)
(42)	10	9	1	10	$(10,19,20)$	$\Delta(\iota_{21})$	η_{19}	$2\sigma_{10}\circ\nu_{17}$	[T] (7.21)
(43)	11	1	10	3	$(3,4,14)$	η_3	$\nu_4\circ\sigma'$	0	
(44)	11	1	10	3	$(3,4,14)$	η_3	$\eta_4\circ\mu_5$	$2\mu'$	[T] (7.7)
(45)	11	1	10	3	$(3,4,14)$	η_3	$E\varepsilon'$	0	
(46)	11	1	10	4	$(4,5,15)$	η_4	$\nu_5\circ\sigma_8$	$\varepsilon_4\circ\nu_{12}+E\nu'\circ\varepsilon_7$	
(47)	11	1	10	7	$(7,8,18)$	η_7	$\sigma_8\circ\nu_{15}$	$\bar\nu_7\circ\nu_{15}$	
(48)	11	3	8	3	$(3,6,14)$	ν'	$\bar\nu_6$	$\varepsilon_3\circ\nu_{11}$	[T] (7.12)
(49)	11	3	8	4	$(4,7,15)$	$E\nu'$	$\sigma'\circ\eta_{14}$	0	
(50)	11	3	8	5	$(5,8,16)$	ν_5	$\sigma_8\circ\eta_{15}$	$\nu_5\circ\varepsilon_8$	
(51)	11	5	6	6	$(6,11,17)$	$\Delta(\iota_{13})$	ν_{11}^2	$2\bar\nu_6\circ\nu_{14}$	
(52)	11	9	2	3	$(3,12,14)$	μ_3	η_{12}^2	$2\mu'$	
(53)	11	9	2	10	$(10,19,21)$	$\Delta(\iota_{21})$	η_{19}^2	0	
(54)	11	10	1	3	$(3,13,14)$	ε'	η_{13}	$\nu'\circ\varepsilon_6$	[T] (7.12)
(55)	12	1	11	3	$(3,4,15)$	η_3	$\nu_4\circ\sigma'\circ\eta_{14}$	0	(43)
(56)	12	1	11	3	$(3,4,15)$	η_3	$\nu_4\circ\bar\nu_7$	0	
(57)	12	1	11	3	$(3,4,15)$	η_3	$\nu_4\circ\varepsilon_7$	$\nu'\circ\eta_6\circ\varepsilon_7$	(3)
(58)	12	1	11	3	$(3,4,15)$	η_3	$\varepsilon_4\circ\nu_{12}$	0	
(59)	12	1	11	3	$(3,4,15)$	η_3	$E\nu'\circ\varepsilon_7$	0	(2)
(60)	12	1	11	3	$(3,4,15)$	η_3	$E\mu'$	0	
(61)	12	1	11	4	$(4,5,16)$	η_4	ζ_5	$E\nu'\circ\mu_7$ $\bmod E\nu'\circ\eta_7\circ\varepsilon_8$	[Og2] Prop.(2.2)(5)
(62)	12	1	11	5	$(5,6,17)$	η_5	$\bar\nu_6\circ\nu_{14}$	ν_5^4	(21)
(63)	12	1	11	11	$(11,12,23)$	η_{11}	$\Delta(\iota_{25})$	0	
(64)	12	3	9	3	$(3,6,15)$	ν'	ν_6^3	0	(9)
(65)	12	3	9	4	$(4,7,16)$	$E\nu'$	$\sigma'\circ\eta_{14}^2$	0	
(66)	12	3	9	5	$(5,8,17)$	ν_5	$\sigma_8\circ\eta_{15}^2$	$\nu_5\circ\eta_8\circ\varepsilon_9$	
(67)	12	3	9	7	$(7,10,19)$	ν_7	$\Delta(\iota_{21})$	0	
(68)	12	9	3	3	$(3,12,15)$	μ_3	ν_{12}	$\nu'\circ\eta_6\circ\varepsilon_7$	[Og2] Prop.(2.2)(4)
(69)	12	10	2	3	$(3,13,15)$	ε'	η_{13}^2	$\nu'\circ\eta_6\circ\varepsilon_7$	
(70)	12	11	1	3	$(3,14,15)$	μ'	η_{14}	$\nu'\circ\mu_6$	[Og2] Prop.(2.2)(4)
(71)	12	11	1	5	$(5,16,17)$	ζ_5	η_{16}	$\nu_5\circ\mu_8 \bmod \mathbb{Z}_2\{\nu_5^4\}$ $\oplus\mathbb{Z}_2\{\nu_5\circ\eta_8\circ\varepsilon_9\}$	

11 定理の証明

証明 備考欄に記載があるものについては、そこを参照すればよい。記載がないものについて以下、証明を行う。煩雑を避けるため、[T] の第 1 章から第 4 章で述べられている一般的な定理や、[W] で述べられている Whitehead 積の一般的性質については断りなく用いることにする。

(6), (7), (9)：$\pi_9^3 = 0$ による。

(8)：$\eta_5 \circ \Delta(\iota_{13}) = \pm(\eta_5 \circ [\iota_6, \iota_6]) = \pm[\eta_5, \eta_5] = \pm[\iota_5 \circ E\eta_4, \iota_5 \circ E\eta_4] = \pm[\iota_5, \iota_5] \circ E(\eta_4 \sharp \eta_4) = \Delta(\iota_{11}) \circ \eta_9 \circ \eta_{10}$

$= \nu_5 \circ \eta_8 \circ \eta_9 \circ \eta_{10} = \nu_5 \circ 4\nu_8 = 4\nu_5^2 = 0 \qquad \because$ [T] (5.10), (5.5)

(11)：$\pi_{10}^3 = 0$ による。

(17)：$\nu' \circ \Delta(\iota_{13}) = \pm(\nu' \circ [\iota_6, \iota_6]) = \pm[\nu', \nu'] = 0 \qquad \because S^3$：Hopf 空間

(22)：$\eta_6 \circ \sigma' \circ \eta_{14} = 4\bar{\nu}_6 \circ \eta_{14} = 0 \qquad \because$ [T] (7.4)

(23)：$\eta_7 \circ \sigma_8 \circ \eta_{15} = (\sigma' \circ \eta_{14} + \bar{\nu}_7 + \varepsilon_7) \circ \eta_{15} = \sigma' \circ \eta_{14}^2 + \nu_7^3 + \eta_7 \circ \varepsilon_8 \qquad \because$ [T] (7.4), Lem.6.3, (7.5)

(26)：$\sigma'' \circ \eta_{13}^2 = 4\bar{\nu}_6 \circ \eta_{14} = 0 \qquad \because$ [T] (7.4)

(32)：$\eta_7 \circ \sigma_8 \circ \eta_{15}^2 = (\sigma' \circ \eta_{14}^2 + \nu_7^3 + \eta_7 \circ \varepsilon_8) \circ \eta_{16} \qquad \because$ (23)

$= 4\sigma' \circ \nu_{14} + \eta_7^2 \circ \varepsilon_9 \qquad \because$ [T] (5.5), (5.9), (7.5)

$= 4\nu_7 \circ \sigma_{10} + 4\nu_7 \circ \sigma_{10} = 0 \qquad \because$ [T] (7.19), (7.10)

(33)：$\eta_9 \circ \Delta(\iota_{21}) = \pm(\eta_9 \circ [\iota_{10}, \iota_{10}]) = \pm[\eta_9, \eta_9] = \pm[\iota_9 \circ E\eta_8,\ \iota_9 \circ E\eta_8]$

$= \pm[\iota_9, \iota_9] \circ E(\eta_8 \sharp \eta_8) = \Delta(\iota_{19}) \circ \eta_{17} \circ \eta_{18}$

$= (\sigma_9 \circ \eta_{16} + \bar{\nu}_9 + \varepsilon_9) \circ \eta_{17}^2 \qquad \because$ [T] (7.1)

$= 4\sigma_9 \circ \nu_{16} + \nu_9^3 \circ \eta_{18} + \eta_9^2 \circ \varepsilon_{11} \qquad \because$ [T] (5.5), Lem.6.3, (7.5)

$= 4\sigma_9 \circ \nu_{16} + 4\nu_9 \circ \sigma_{12} \qquad \because$ [T] (5.9), (7.10)

$= 4\sigma_9 \circ \nu_{16} \qquad \because$ [T] (7.20)

(36)：[T] (6.2), (7.10), (7.16) によりわかる。

(39)：[T] (7.5), Lem. 6.6 によりわかる。

(40)：[T] Lem. 6.3, (5.9) によりわかる。

(43)：$E(\eta_3 \circ \nu_4 \circ \sigma') = \eta_4 \circ \nu_5 \circ E\sigma' = E\nu' \circ \eta_7 \circ E\sigma' \qquad \because$ [T] (5.9)

$= E\nu' \circ 4\bar{\nu}_7 = 0 \qquad \because$ [T] (7.4)

ここで、 $E\colon \pi_{14}^3 \to \pi_{15}^4$ は単射なので、$\eta_3 \circ \nu_4 \circ \sigma' = 0$。

(45)：$E(\eta_3 \circ E\varepsilon') = \eta_4 \circ E^2\varepsilon'$

$= \eta_4 \circ (\pm 2(\nu_5 \circ \sigma_8)) \qquad \because$ [T] (7.10)

$= \pm 2(\eta_4 \circ \nu_5 \circ \sigma_8) = \pm 2(E\nu' \circ \eta_7 \circ \sigma_8) \qquad \because$ [T] (5.9)

$= \pm 2(E\nu' \circ (\sigma' \circ \eta_{14} + \bar{\nu}_7 + \varepsilon_7)) \qquad \because$ [T] (7.4)

$= \pm 2(E\nu' \circ \sigma' \circ \eta_{14} + E\nu' \circ \bar{\nu}_7 + E\nu' \circ \varepsilon_7) = 0$

よって (43) と同様に、$\eta_3 \circ E\varepsilon' = 0$。

(46)：$\eta_4 \circ \nu_5 \circ \sigma_8 = E\nu' \circ \eta_7 \circ \sigma_8 \qquad \because$ [T] (5.9)

$= E\nu' \circ (\sigma' \circ \eta_{14} + \bar{\nu}_7 + \varepsilon_7) \qquad \because$ [T] (7.4)

$= E\nu' \circ \sigma' \circ \eta_{14} + E\nu' \circ \bar{\nu}_7 + E\nu' \circ \varepsilon_7$

$= 2E\varepsilon' \circ \eta_{14} + \varepsilon_4 \circ \nu_{12} + E\nu' \circ \varepsilon_7 \qquad \because$ [Og2] Prop. (2.2)(1), [T] (7.12)

$= \varepsilon_4 \circ \nu_{12} + E\nu' \circ \varepsilon_7$

(47)：$\eta_7 \circ \sigma_8 \circ \nu_{15} = (\sigma' \circ \eta_{14} + \bar{\nu}_7 + \varepsilon_7) \circ \nu_{15} \qquad \because$ [T] (7.4)

$= \sigma' \circ \eta_{14} \circ \nu_{15} + \bar{\nu}_7 \circ \nu_{15} + \varepsilon_7 \circ \nu_{15}$

$= \bar{\nu}_7 \circ \nu_{15} \qquad \because$ [T] (5.9), (7.13)

(49)：$E\nu'\circ\sigma'\circ\eta_{14}=2E\varepsilon'\circ\eta_{14}=0$ $\because$ [Og2] Prop. (2.2)(1)

(50)：$\nu_5\circ\sigma_8\circ\eta_{15}=\nu_5\circ\bar{\nu}_8,$ または, $\nu_5\circ\varepsilon_8$ $\because$ [Og2] Prop. (2.2)(3)

[T] (7.11) の懸垂像を考えることにより、$\Delta(\nu_5\circ\sigma_8)=\pm(\eta_2\circ\varepsilon')$ がわかる。よって、

$\Delta(\nu_5\circ\sigma_8\circ\eta_{15})=\Delta(\nu_5\circ\sigma_8)\circ\eta_{13}=(\pm(\eta_2\circ\varepsilon'))\circ\eta_{13}=\eta_2\circ\varepsilon'\circ\eta_{13}=\eta_2\circ\nu'\circ\varepsilon_6$

$\Delta(\nu_5\circ\bar{\nu}_8)=\Delta(\nu_5)\circ\bar{\nu}_6=(\pm(\eta_2\circ\nu'))\circ\bar{\nu}_6$ $\because$ [T] Lem.5.7

$=\pm(\eta_2\circ\nu'\circ\bar{\nu}_6)=\eta_2\circ(\pm(\nu'\circ\bar{\nu}_6))=\eta_2\circ(\pm(\varepsilon_3\circ\nu_{11}))$ $\because$ [T] (7.12)

$=\eta_2\circ\varepsilon_3\circ\nu_{11}$

$\Delta(\nu_5\circ\varepsilon_8)=\Delta(\nu_5)\circ\varepsilon_6=(\pm(\eta_2\circ\nu'))\circ\varepsilon_6=\eta_2\circ\nu'\circ\varepsilon_6$ $\because$ [T] Lem.5.7

よって、$\nu_5\circ\sigma_8\circ\eta_{15}=\nu_5\circ\varepsilon_8$。

(51)：$\Delta(\iota_{13})\circ\nu_{11}^2=\Delta(\iota_{13})\circ\nu_{11}\circ\nu_{14}=\pm2\bar{\nu}_6\circ\nu_{14}=2\bar{\nu}_6\circ\nu_{14}$ $\because$ [T] Lem. 6.2

(52)：$\mu_3\circ\eta_{12}^2=\eta_3^2\circ\mu_5=2\mu'$ $\because$ [Og2] Prop.(2.2)(2), [T] (7.7)

(53)：$\Delta(\iota_{21})\circ\eta_{19}^2=\Delta(\iota_{21})\circ\eta_{19}\circ\eta_{20}=2\sigma_{10}\circ\nu_{17}\circ\eta_{20}=0$ $\because$ [T] (7.21)

(56)：$\eta_3\circ\nu_4\circ\bar{\nu}_7=\nu'\circ\eta_6\circ\bar{\nu}_7=\nu'\circ\nu_6^3=0$ $\because$ [T] (5.9), Lem. 6.3, $\pi_9^3=0$

(58)：$\eta_3\circ\varepsilon_4\circ\nu_{12}=\eta_3\circ E\nu'\circ\bar{\nu}_7=0$ $\because$ [T] (7.12), Lem. 5.7

(60)：[T] P75 による。

(63)：[T] (7.21), (5.9) を用いると (8) と全く同様である。

(65)：(35) を用いると容易にわかる。

(66)：(50) と [T] (7.5) を用いると容易にわかる。

(67)：$\pi_{19}^7=0$ による。

(69)：[T] (7.12), (7.5) を用いると容易にわかる。

(71)：[Og2] Prop. (2.2)(6) より、$E(\zeta_5\circ\eta_{16})=8\Delta(\sigma_{13})=E(\nu_5\circ\mu_8)$

$E\colon\pi_{17}^5\to\pi_{18}^6$ の核を考えると、所望の合同式を得る。

12 今後の課題

球面のホモトピー群の合成に関して、一般に左分配則は成り立つが右分配則は成り立たない。その補正項は Hopf-Hilton 準同型および Whitehead 積によって与えられる（[W] を参照）。これらの解析を行うことが今後の課題の一つである。また、関係式を正確に求めるための手法の開発も課題である。例えば、行列戸田括弧積を用いる方法 [MO] や、高次戸田括弧積を用いる方法 [Og1], [M], [OO1], [OO2] などが考案されている。しかし、球面のホモトピー群に関する様々な構造を決定する問題は一般に難解であり、残されている課題は多いように思われる。

参考文献

[IMM] T. Inoue, T. Miyauchi and J. Mukai, The 2-components of the 31-stem homotopy groups of the 9 and 10-spheres, J. Fac. Shinshu Univ. 46 (2015), 1-19.

[M] M. Mimura, On the generalized Hopf homomorphism and the higher composition, Part I, J. Math. Kyoto Univ. 4-1 (1964), 171-190 ; Part II, J. Math. Kyoto Univ. 4-2 (1965), 301-326.

[MM] T. Miyauchi and J. Mukai, Determination of the 2-primary components of the 32-stem homotopy groups of S^n, Bol. Soc. Mat. Mex. 23 (2017), 319-387.

[MMO] M. Mimura, M. Mori and N. Oda, Determination of 2-components of the 23 and 24-stems in homotopy groups of spheres, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. 29 (1975), 1-42.

[MO] H. J. Marcum and N. Oda, Some classical and matrix Toda brackets in the 13- and 15-stems, Kyushu J. Math., 55 (2001), 405-428.

[MT] M. Mimura and H. Toda, The (n+20)-th homotopy groups of n-spheres, J. Math. Kyoto Univ. 3-1 (1963), 37-58.

[N] 西田吾郎, ホモトピー論, (1985), 共立出版.

[Od1] N. Oda, On the orders of the generators in the 18-stem of the homotopy groups of spheres, Adv. Stud. Pure Math. 9 (1986), 231-236.

[Od2] N. Oda, Unstable homotopy groups of spheres, Bull. Inst. Adv. Res. Fukuoka Univ. 44 (1979), 49-152.

[Og1] K. Ôguchi, A generalization of secondary composition and its application, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo X (1963), 29-79.

[Og2] K. Ôguchi, Generators of 2-primary components of homotopy groups of spheres, unitary groups and symplectic groups, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 11 (1964), 65-111.

[OO1] H. Ōshima and K. Ōshima, Quasi tertiary compositions and a Toda bracket in homotopy groups of $SU(3)$, Math. J. Okayama Univ., 57 (2015), 13-78.

[OO2] H. Ōshima and K. Ōshima, Another description of quasi tertiary composition, Math. J. Okayama Univ., 58 (2016), 109-123.

[S] J. -P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, Ann. of Math., 54 (1951), 425-505.

[T] H. Toda, Composition methods in homotopy groups of spheres, Ann. of Math. Studies 49, Princeton University Press, Princeton, 1962.

[W] G. W. Whitehead, Elements of homotopy theory, Springer-Verlag (1978).