特殊な形の調和数について

後 藤 文 志

0　概要

本論文では、素因数分解が $p^2p_1p_2\cdots p_r$ の形をした調和数を全て決定する。そのような調和数は、ちょうど6個であり、全て偶数である。

1　序

本論文では、n, m, d, e, k, r は正整数を表し、$p, p_1, p_2, \cdots$ は素数を表すものとする。$d \mid n$ は、d が n の約数であることを意味する。$p^k \mid n$ かつ $p^{k+1} \nmid n$ のとき、$p^k \parallel n$ と表す。σ_k は約数関数とする。すなわち、

$$\sigma_k(n) = \sum_{d \mid n} d^k$$

である。特に、$\sigma_1(n)$ は n の約数の和であり、$\sigma_0(n)$ は n の約数の個数である。簡単に分かることだが、σ_k は乗法的である。すなわち、m, n が互いに素のとき、$\sigma_k(mn) = \sigma_k(m)\sigma_k(n)$ が成り立つ。

$\sigma_1(n) = 2n$ のとき、n を完全数という。例えば、$6, 28, 496, 8128$ は古代から知られている完全数である。2014年9月現在、知られている完全数は48個 (1) のみであり、その全ては偶数である。奇数の完全数が存在するか否かは、最古の未解決問題のひとつである。

(1) よく知られているように、偶数の完全数はメルセンヌ素数、すなわち $2^p - 1$ の形の素数と1対1に対応しており、GIMPS [9] によれば、現在知られているメルセンヌ素数は48個である。

完全数に関連して、オア [7] は1948年に**調和数**の概念を導入した。n の約数の調和平均を $H(n)$ と書くことにする。$H(n)$ が整数のとき、n を調和数と呼ぶ [(2)]。例えば、$H(1)=1$ なので、1 は最小の調和数である。これを**自明な**調和数と呼ぶ。次に小さな調和数は 6 である。実際、

$$H(6)=\frac{4}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=\frac{6\times 4}{6+3+2+1}=2$$

であるから。途中の計算式より、一般に

$$H(n)=\frac{n\sigma_0(n)}{\sigma_1(n)}$$

であることが了解され、この表示より H が乗法的であることが分かる。

オアは、完全数は調和数であることを証明し、非自明な奇数の調和数は存在しない、と予想した。オアの予想が正しければ、奇数の完全数は存在しないことが従う。1 でも完全数でもない最小の調和数は 140 である。実際、H が乗法的であることを用いて

$$H(140)=H(2^2)H(5)H(7)=\frac{2^2\cdot 3}{7}\cdot\frac{5\cdot 2}{6}\cdot\frac{7\cdot 2}{8}=5$$

と計算される。完全数に比べて、調和数はかなり数が多い。10^{14} までに、完全数は8個しかないのに対し、調和数は937個あることが知られている (後藤・桶屋 [5])。1以外は全て偶数であり、オアの予想を数値的に裏付ける結果となっている。また、もし非自明な奇数の調和数が存在したならば、それは 10^{24} 以上であり (コーエン・ソルリ [4])、最大素因子は 10^5 以上であること (知識・後藤・大野 [1]) が知られている。

オアはまた、平方因子を持たない調和数は $1,6$ のみであることを示した。本論文では、この結果に類する問題を考える。すなわち、平方因子を持たな

---

(2) 正確には、オア自身は概念を導入しただけで、名付けてはいない。初めて調和数 (harmonic number) と呼んだのは、ポメランス [8] である。なお、調和数という語は、自然数の逆数和 $H_n=\sum_{m=1}^{n} m^{-1}$ を意味することの方が多いので、混乱を避けるために、我々の調和数は Ore's harmonic number, harmonic divisor number などと呼ばれることもある。

い数に最も近いものとして、平方因子をひとつだけ持つ数を考える。本論文の主結果は以下の通りである。

主結果. 素因数分解が $p^2 p_1 \cdots p_r$ の形をした調和数は、以下の6つのみである。

$$\begin{aligned}
28 &= 2^2 \cdot 7 \quad (H(28) = 3)\\
140 &= 2^2 \cdot 5 \cdot 7 \quad (H(140) = 5)\\
1638 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \quad (H(1638) = 9)\\
8190 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \quad (H(8190) = 15)\\
27846 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17 \quad (H(27846) = 17)\\
237510 &= 2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 29 \quad (H(237510) = 29)
\end{aligned}$$

2 準備

本節では、証明に必要な補題および有用な概念をいくつか用意する。コーエン [2] は、$H(n) \leq 13$ なる調和数 n を全て決定し、そのようなものは全部で13個であることを示した。なお、この結果は計算機を用いて拡張されており、$H(n) \leq 1200$ なる調和数 n が全て決定されていて、そのようなものは全部で1376個ある ([5])。本論文の主結果のためには、次のことだけを知っていればよい。

補題1. $H(n) \leq 4$ なる調和数 n は、$1, 6, 28$ の3つのみである。

さて、コーエン・ソルリ [3] は、harmonic seed[(3)] の概念を導入した。n の約数 d について、n/d と d が互いに素であるとき、d は n の**単約数** (unitary divisor) といい、n は d の**単倍数** (unitary multiple) という。そして、自

[(3)]調和数を産む元となる種の数、という程度の意味であろう。金光訳 [6] では「調和種数」と訳されているが、全く別の概念「種数」(genus) を想起するおそれがあるため、ここでは原語を用いることにする。

分自身以外に非自明な調和数である単約数を持たない調和数を、**harmonic seed** と呼ぶ。調和数であることが前提である場合は、単に seed ともいう。例えば、主結果で言及されている調和数について、1638 は seed であるが、8190 ($= 1638\cdot 5$) は 1638 の単倍数であるので、seed ではない。なお、27846 や 237510 も 1638 の単倍数である。1638 という「種」から、複数の調和数が産まれていると解釈できる。

コーエン・ソルリ [3, 定理 3] は、次の命題を示している。

補題 2. $p_1, \cdots, p_r$ は $p_1 < \cdots < p_r$ を満たす素数で、n を割らないとする。n と $np_1 \cdots p_r$ がともに非自明な調和数であるとき、$p_1 p_2 = 6$ である場合を除き、np_1 も調和数である。

なお、例外にあたるもの、すなわち $n, 6n$ がともに調和数であるような例はひとつも知られていない。もしそのような例が存在したならば、n は非自明な奇数の調和数となって、オアの予想に反する。

3　主結果の証明

n を $p^2 p_1 p_2 \cdots p_r$ の形の調和数とする。以下の 3 通りに分けて考える。

(3.1 節)　$4 \mid n$　　(3.2 節)　$2 \parallel n$　　(3.3 節)　n が奇数

3.1　4 の倍数の場合

$n = 2^2 p_1 p_2 \cdots p_r$ の形の調和数を全て決定する。$H(2^2) = \frac{12}{7}$ であるから、$7 \mid n$ が必要である。

$$H(2^2 \cdot 7) = \frac{12}{7} \cdot \frac{7}{4} = 3$$

は整数となるので、調和数 $\boxed{28}$ を得た。補題2により、$2^2 \cdot 7p_2 \cdots p_r$ が調和数ならば、$2^2 \cdot 7p_2$ が調和数でなければならない。

$$H(2^2 \cdot 7p_2) = 3 \cdot \frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}}$$

が整数であるためには、$\frac{p_2+1}{2} = 3$ すなわち $p_2 = 5$ が必要で、

$$H(2^2 \cdot 7 \cdot 5) = 5$$

は整数であるから、調和数 $\boxed{140}$ を得た。さらに、

$$H(2^2 \cdot 7 \cdot 5p_3) = 5 \cdot \frac{p_3}{\frac{p_3+1}{2}}$$

が整数であるためには、$\frac{p_3+1}{2} = 5$ すなわち $p_3 = 9$ が必要だが、これは素数ではないので、これ以上は調和数を得られない。

3.2　2で1回だけ割れる場合

$n = 2p^2p_2 \cdots p_r$ の形の調和数を全て決定する。$H(2) = \frac{4}{3}$ であるから、分母の 3 を約分するためには、

$$H(3) = \frac{3}{2}, \quad H(3^2) = \frac{27}{13}, \quad H(p^2) = \frac{3p^2}{1+p+p^2} \quad (p \equiv 2 \pmod 3)$$

のいずれかが必要である。

(1)　$3 \parallel n$ の場合、$H(2 \cdot 3) = 2$ であるから、調和数 $\boxed{6}$ を得た。さらに、6 の単倍数である調和数を考察せねばならないが、それは 3.4 節で行う。

(2)　$3^2 \mid n$ の場合、

$$H(2 \cdot 3^2) = \frac{4}{3} \cdot \frac{27}{13} = \frac{36}{13}$$

であるから、$13 \mid n$ が必要である。

$$H(2 \cdot 3^2 \cdot 13) = \frac{36}{13} \cdot \frac{13}{7} = \frac{36}{7}$$

であるから、$7 \mid n$ が必要である。

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7)=\frac{36}{7}\cdot\frac{7}{4}=9$$

は整数であるから、調和数 $\boxed{1638}$ を得た。さらに、

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7p_4)=9\cdot\frac{p_4}{\frac{p_4+1}{2}}$$

が整数であるためには、$\frac{p_4+1}{2}=3,9$ すなわち $p_4=5,17$ が必要である。

(i) $p_4=5$ のとき、

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7\cdot 5)=9\cdot\frac{5}{3}=15$$

は整数であるから、調和数 $\boxed{8190}$ を得た。さらに、

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7\cdot 5p_5)=15\cdot\frac{p_5}{\frac{p_5+1}{2}}$$

が整数であるためには、$\frac{p_5+1}{2}=3,5,15$ すなわち $p_5=5,9,29$ が必要であるが、このうち 9 は素数ではなく、5 はすでに用いられているので、$p_5=29$ のみが適しており、

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7\cdot 5\cdot 29)=15\cdot\frac{29}{15}=29$$

より、調和数 $\boxed{237510}$ を得た。さらに、

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7\cdot 5\cdot 29p_6)=29\cdot\frac{p_6}{\frac{p_6+1}{2}}$$

が整数であるためには、$\frac{p_6+1}{2}=29$ すなわち $p_6=57$ が必要であるが、これは素数ではない。

(ii) 戻って $p_4=17$ のとき、

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7\cdot 17)=9\cdot\frac{17}{9}=17$$

は整数であるから、調和数 $\boxed{27846}$ を得た。さらに、

$$H(2\cdot 3^2\cdot 13\cdot 7\cdot 17p_5)=17\cdot\frac{p_5}{\frac{p_5+1}{2}}$$

が整数であるためには、$\frac{p_5+1}{2}=17$ すなわち $p_5=33$ が必要であるが、これは素数ではない。

(3) $p\equiv 2 \pmod 3$ なる素数 p に対して $p^2\mid n$ の場合を考える。結論から言えば、この場合に調和数は得られない。さて、改めて $n=2p^2p_1\cdots p_r$ を seed と仮定しよう (4)。

$$H(2p^2p_1\cdots p_r)=\frac{4p^2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_1}{\frac{p_1+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるが、分子の $p_1,\cdots,p_r$ は全て約分される。なぜならば、もし約分されない p_i があったとすると、n/p_i も調和数となって、n が seed という仮定に反するからである。しかし、p は 2 個ともは約分されない。2 個とも約分されると $H(n)\leq 4$ となって補題 1 に反するから (この議論は今後も繰り返し暗黙のうちに用いる)。$p_1<\cdots<p_r$ と仮定すると、$\frac{p_1+1}{2}$ は $p_1,\cdots,p_r$ のいずれよりも小さいので、$\frac{p_1+1}{2}=1,2,4,p,2p,4p$ が必要である。このうち、p,p_1 が奇素数かつ $p\equiv 2 \pmod 3$ という条件に合致するのは $\frac{p_1+1}{2}=2,4,2p$ すなわち $p_1=3,7,4p-1$ の場合のみである。しかし、$p_1=3$ の場合は、調和数 6 が n の単約数になり、n が seed であるという仮定に反する。

(i) $p_1=7$ のとき、

$$H(2p^2\cdot 7p_2\cdots p_r)=\frac{7p^2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

(4) seed と仮定してよいのは、調和数である非自明な単約数を持つ場合には、そのような調和数を探すことに帰着できるからである。まず、$p_1,\cdots,p_r$ のうちいくつかを省いても調和数であれば、省いたものを改めて $p_1,\cdots,p_r$ とすればよい。$p^2p_1\cdots p_r$ の形の調和数が存在しないことは 3.3 節で示す。$2p_1\cdots p_r$ の形の調和数が 6 しか存在しないことはオアが証明済みであり、$6p^2p_2\cdots p_r$ の形の調和数が存在しないことは 3.4 節で示す。

であるから、先程と同様の議論により、$\frac{p_2+1}{2}=7,7p$ が必要。後者の場合は、$p_1=14p-1\equiv 0 \pmod 3$ となって不適。前者の場合、

$$H(2p^2\cdot 7\cdot 13p_3\cdots p_r)=\frac{13p^2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_3}{\frac{p_3+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるから、$\frac{p_3+1}{2}=13,13p$ が必要だが、両方とも不適。

(ii) $p_1=4p-1$ のとき、

$$H(2p^2p_1p_2\cdots p_r)=\frac{2pp_1}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

である。$\frac{p_2+1}{2}$ が約分によって消えるためには、$\frac{p_2+1}{2}=p_1,2p_1$ が必要だが、後者は $p_2=4p_1-1\equiv 0 \pmod 3$ となって不適。よって、$p_2=2p_1-1$ が必要で、以下同様に $p_{i+1}=2p_i-1$ でなければならない。このとき、$p_r=2^{r+1}p-2^r+1$ となり、これが p^2+p+1 を約分によって消さなければならないので、

$$2^{r+1}p-2^r+1=p^2+p+1$$

となる。しかし、$\bmod p$ を取ると $2^r\equiv 0 \pmod p$ となるため、矛盾する。

3.3　2で割れない場合

$n=p^2p_1\cdots p_r$ が奇数の場合を、以下の3通りに分けて考える。

(1) $p=3$　　(2) $p\equiv 1 \pmod 3$　　(3) $p\equiv 2 \pmod 3$

(1) $p=3$ のとき、$H(3^2)=\frac{3^3}{13}$ であるから、$13\mid n$ が必要である。

$$H(3^2\cdot 13)=\frac{3^3}{13}\cdot\frac{13}{7}=\frac{3^3}{7}$$

なので、$7\mid n$ が必要である。

$$H(3^2\cdot 13\cdot 7)=\frac{3^3}{7}\cdot\frac{7}{4}=\frac{3^3}{2^2}$$

であるが、分母の 2 を約分することは不可能なので、調和数は得られない。
(2) $p \equiv 1 \pmod 3$ の場合を考える。$n = p^2 p_1 \cdots p_r$ $(p_1 < \cdots < p_r)$ が seed としよう。

$$H(p^2 p_1 \cdots p_r) = \frac{p^2}{\frac{p^2+p+1}{3}} \cdot \frac{p_1}{\frac{p_1+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるが、前節と同様の議論により、$\frac{p_1+1}{2} = p, \frac{p_2+1}{2} = p_1, \cdots, \frac{p_r+1}{2} = p_{r-1}$ が必要で、このとき $p_r = 2^r p - 2^r + 1$ である。これが $\frac{p^2+p+1}{3}$ を約分によって消さなければならないので、

$$2^r p - 2^r + 1 = \frac{p^2+p+1}{3}$$

となる。整理して

$$(p-1)(p - 3 \cdot 2^r + 2) = 0$$

だが、$p = 1$ も $p = 3 \cdot 2^r - 2$ も素数ではない。
(3) $p \equiv 2 \pmod 3$ の場合を考える。$n = p^2 p_1 \cdots p_r$ $(3 < p_1 < \cdots < p_r)$ が seed としよう。

$$H(p^2 p_1 \cdots p_r) = \frac{3p^2}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_1}{\frac{p_1+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるから、$\frac{p_1+1}{2} = 3, p, 3p$ すなわち $p_1 = 5, 2p-1, 6p-1$ が必要である。このうち、$p_1 = 2p - 1 \equiv 0 \pmod 3$ はすぐに不適と分かる。
(i) $p_1 = 5$ のとき、

$$H(5p^2 p_2 \cdots p_r) = \frac{5p^2}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるから、$\frac{p_2+1}{2} = 5, p, 5p$ すなわち $p_2 = 9, 2p-1, 10p-1$ が必要である。このうち、$p_2 = 9$ と $p_2 = 2p - 1 \equiv 0 \pmod 3$ はすぐに不適と分かる。
$p_2 = 10p - 1$ のとき、

$$H(5p^2 p_2 \cdots p_r) = \frac{pp_2}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_3}{\frac{p_3+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

より $\frac{p_3+1}{2}=p_2$ すなわち $p_3=2p_2-1$ が必要で、以下同様に $p_{i+1}=2p_i-1$ なので $p_r=5\cdot 2^{r-1}p-2^{r-1}+1$ となる。これが p^2+p+1 と等しくなければならないが、$2^{r-1}\equiv 0 \pmod p$ となって矛盾。
(ii) $p_1=6p-1$ のとき、

$$H(p^2p_1\cdots p_r)=\frac{pp_1}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

である。$r=1$ のとき、$p_1=p^2+p+1$ が必要だが、これを満たす p は存在しない。$r\geq 2$ のときは $\frac{p_2+1}{2}=p_1$ が必要だが、$p_2=2p_1-1\equiv 0 \pmod 3$ となって矛盾。

3.4 6の単倍数

3.2節の (1) で後回しにしていた部分を考える。すなわち、6 の単倍数である調和数について考察する。一般に、6 の単倍数である調和数はひとつも知られていない。主結果の証明のためには、$n=6p^2p_1\cdots p_r$ $(3<p_1<\cdots<p_r)$ の形の調和数が存在しないことを示せばよい。前節までの結果より、n は6および自分自身以外に調和数である単約数を持たないと仮定してよい。
(1) $p\equiv 1 \pmod 3$ の場合、

$$H(6p^2p_1\cdots p_r)=2\cdot\frac{p^2}{\frac{p^2+p+1}{3}}\cdot\frac{p_1}{\frac{p_1+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

である。もし 2 が約分によって消えないとすると、$p^2p_1\cdots p_r$ が調和数となって仮定に反するから、2 は約分されなければならない。さて、$\frac{p_1+1}{2}=2,p,2p$ が必要だが、$p_1=3$ や $p_1=4p-1\equiv 0 \pmod 3$ は不適だから、$p_1=2p-1$ が必要。以下同様に $p_{i+1}=2p_i-1$ でなければならず、2 は約分されない。
(2) $p\equiv 2 \pmod 3$ の場合、

$$H(6p^2p_1\cdots p_r)=2\cdot\frac{3p^2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_1}{\frac{p_1+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

より、$\frac{p_1+1}{2}=2,3,6,p,2p,3p,6p$ すなわち

$$p_1=3,5,11,2p-1,4p-1,6p-1,12p-1$$

が必要である。このうち、$p_1=3$ と $p_1=2p-1\equiv 0 \pmod 3$ はすぐに不適と分かる。$p_1=5$ の場合が最も長くなるので、これは最後に扱う。
(i)　$p_1=11$ の場合、

$$H(6\cdot 11p^2p_2\cdots p_r)=\frac{11p^2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

より、$\frac{p_2+1}{2}=11,p,11p$ すなわち $p_2=21,2p-1,22p-1$ が必要だが、素数になり得るのは $p_2=22p-1$ のみ。このとき

$$H(6\cdot 11p^2p_2\cdots p_r)=\frac{pp_2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_3}{\frac{p_3+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

より $\frac{p_3+1}{2}=p_2$ すなわち $p_3=2p_2-1$ が必要で、以下同様に $p_{i+1}=2p_i-1$ なので $p_r=11\cdot 2^{r-1}p-2^{r-1}+1$ となる。これが p^2+p+1 と等しくなければならないが、$2^{r-1}\equiv 0 \pmod p$ となって矛盾。
(ii)　$p_1=4p-1$ の場合、

$$H(6p^2p_1\cdots p_r)=\frac{3pp_1}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

である。$r=1$ の場合、$p^2+p+1=p_1,3p_1$ が必要だが、例えば前者の場合、$p^2+p+1=4p-1$ を解くと $p=1,2$ となって不適。よって $r\geq 2$ が必要で、$\frac{p_2+1}{2}=p_1,3p_1$ すなわち $p_2=2p_1-1,6p_1-1$ が必要である。後者の場合、$r\geq 3$ かつ $p_3=2p_2-1\equiv 0 \pmod 3$ は矛盾するので、$r=2$ が必要で、

$$H(6p^2p_1p_2)=\frac{pp_2}{p^2+p+1}$$

となるが、$p_2\equiv 2 \pmod 3$ は $p^2+p+1\equiv 1 \pmod 3$ を約分によって消せない。よって、$p_2=2p_1-1$ が必要であり、同様の理由で $p_{i+1}=2p_i-1$ だ

から $p_r = 11 \cdot 2^{r-1}p - 2^{r-1} + 1$ であり、これが $p^2 + p + 1$ を約分によって消すとすれば、これまでと同様に $2^{r-1} \equiv 0 \pmod{p}$ となって矛盾。

(iii) $p_1 = 6p - 1$ の場合、

$$H(6p^2p_1 \cdots p_r) = \frac{2pp_1}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

である。$r = 1$ が不適であることはすぐに分かる。よって、$\frac{p_2+1}{2} = p_1, 2p_1$ すなわち $p_2 = 2p_1 - 1, 4p_1 - 1$ が必要である。$p_2 = 2p_1 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ は不適なので、$p_2 = 4p_1 - 1$ が必要。以下、$p_{i+1} = 2p_i - 1$ で、$p_r = 6 \cdot 2^r p - 3 \cdot 2^{r-1} + 1$ となり、これが $p^2 + p + 1$ と等しいとすると、$3 \cdot 2^{r-1} \equiv 0 \pmod{p}$ となって矛盾。

(iv) $p_1 = 12p - 1$ の場合、

$$H(6p^2p_1 \cdots p_r) = \frac{pp_1}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

である。$r = 1$ が不適であることはすぐに分かる。$\frac{p_2+1}{2} = p_1$ の場合も、$p_2 = 2p_1 - 1 \equiv 0 \pmod{3}$ となり不適。

(v) 最後に、$p_1 = 5$ の場合を見る。

$$H(6 \cdot 5p^2p_2 \cdots p_r) = \frac{10p^2}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_2}{\frac{p_2+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

なので、$\frac{p_2+1}{2} = 5, 10, p, 5p, 10p$ すなわち $p_2 = 9, 19, 2p-1, 10p-1, 20p-1$ が必要。このうち、$p_2 = 9,\ 2p-1, 20p-1$ は明らかに不適。

(v-1) $p_2 = 19$ の場合、

$$H(6 \cdot 5 \cdot 19p^3p_3 \cdots p_r) = \frac{19p^2}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_3}{\frac{p_3+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるが、$p^2 + p + 1 = 19$ となることはないので、$\frac{p_3+1}{2} = 19, 19p$ すなわち $p_3 = 37, 38p - 1$ が必要。後者は $\bmod 3$ で不適。

$$H(6 \cdot 5 \cdot 19 \cdot 37p^4p_4 \cdots p_r) = \frac{37p^2}{p^2+p+1} \cdot \frac{p_4}{\frac{p_4+1}{2}} \cdots \frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるが、$p^2+p+1=37$ となることはないので、$\frac{p_4+1}{2}=37, 37p$ すなわち $p_4=73, 74p-1$ が必要。後者は $\bmod 3$ で不適。

$$H(6\cdot 5\cdot 19\cdot 37\cdot 73p^2p_5\cdots p_r)=\frac{73p^2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_5}{\frac{p_5+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

であるが、$p^2+p+1=73$ となることはないので、$\frac{p_5+1}{2}=73, 73p$ すなわち $p_5=145, 146p-1$ が必要。これらはともに不適。

(v-2)　$p_2=10p-1$ の場合、

$$H(6\cdot 5p^2p_2\cdots p_r)=\frac{2pp_2}{p^2+p+1}\cdot\frac{p_3}{\frac{p_3+1}{2}}\cdots\frac{p_r}{\frac{p_r+1}{2}}$$

なので、$\frac{p_3+1}{2}=p_2, 2p_2$ すなわち $p_3=2p_2-1, 4p_2-1$ が必要。後者は $\bmod 3$ で不適なので、$p_3=2p_2-1$ でなければならない。同様に、以下 $p_{i+1}=2p_i-1$ で、$p_r=5\cdot 2^{r-1}p-2^{r-1}+1$ となり、これが p^2+p+1 と等しいとすれば、これまでと同様に $2^{r-1}\equiv 0 \pmod p$ となって矛盾。

4　さらなる問題

議論が単調になるため、詳細は省くが、主結果の証明と同様の手法により、以下のことが示せる。

定理. 素因数分解が $p^3p_1\cdots p_r$ の形をした調和数は、以下の2つのみである。

$$270=2\cdot 3^3\cdot 5 \quad (H(270)=6)$$
$$2970=2\cdot 3^3\cdot 5\cdot 11 \quad (H(2970)=11)$$

このように、e を固定して、$p^ep_1\cdots p_r$ の形をした調和数を全て決定することは、それほど難しくはない。e を動かした場合も考察したいが、この形の数は偶数の完全数やその単倍数を含んでおり、偶数の完全数は無数に存在すると考えられているため、全てを決定するのは難しいと思われる。別方向に

一般化して、$e_1, \cdots, e_r$ を固定したとき、素因数分解が $p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r} q_1 \cdots q_s$ の形をした調和数が無数に存在することがあるだろうか。著者は有限個しか存在しないだろうと予想する。

参考文献

[1] Y. Chishiki, T. Goto and Y. Ohno, *On the largest prime divisor of an odd harmonic number*, Mathematics of Computation, **76** (2007), 1577-1587.

[2] G. L. Cohen, *Numbers whose positive divisors have small integral harmonic mean*, **66** (1997), 883-891.

[3] G. L. Cohen and R. M. Sorli, *Harmonic seeds*, Fibonacci Quarterly, **36** (1998), 386-390. *Errata*, Fibonacci Quarterly, **39** (2001), 4.

[4] G. L. Cohen and R. M. Sorli, *Odd harmonic numbers exceed* 10^{24}, Mathematics of Computation, **79** (2010), 2451-2460.

[5] T. Goto and K. Okeya, *All harmonic numbers less than* 10^{14}, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, **24**, no. 3 (2007), 275-288.

[6] R. K. Guy, *Unsolved Problems in Number Theory*, 3rd edition, Springer, 2004. 金光滋訳『数論「未解決問題」の事典』朝倉書店、2010 年

[7] O. Ore, *On the averages of the divisors of a number*, American Mathematical Monthly, **55** (1948), 615–619.

[8] C. Pomerance, *On a problem of Ore*: *Harmonic numbers*, Notices of American Mathematical Society, **20** (1973), A-648.

[9] GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search), `http://www.mersenne.org/`

（ごとう　たけし・准教授）